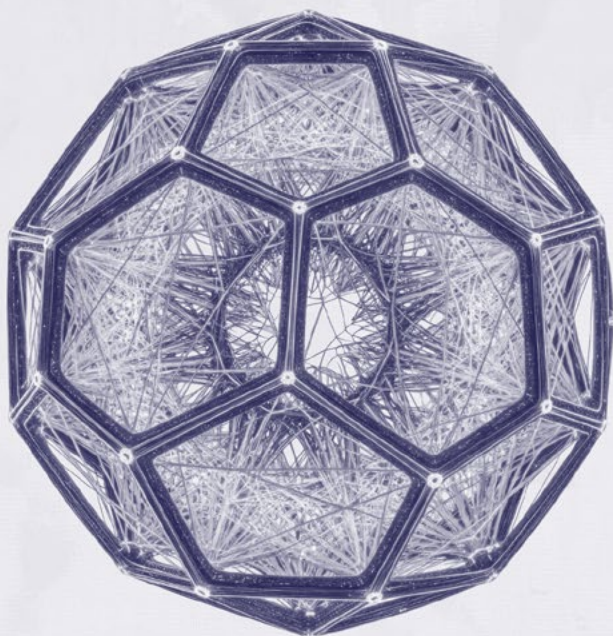


Judith Keren Jiménez Vilcherrez, Ricardo Velezmoro León,
Víctor Bernardo Sosa Gonzales, Reucher Correa Morocho,
María Cristina Ramírez Carrasco

DEL PLANO CARTESIANO AL HIPERESPACIO



*Un modelo para visualizar hipersuperficies
en 5D con Mathematica*

Judith Keren Jiménez Vilcherrez, Ricardo
Velezmoro León, Víctor Bernardo Sosa Gonzales,
Reucher Correa Morocho, María Cristina Ramírez
Carrasco

Del plano cartesiano al hiperespacio

*Un modelo para visualizar
hipersuperficies en 5D con
Mathematica*

Atik Editorial



E15D N49-59 y Olivos, San Isidro. Código postal 170515.
Quito, Ecuador

Atik Editorial, es una iniciativa del Centro de Investigaciones
CICSHAL y está a cargo del departamento de Comunicación y
Difusión Científica.

www.atikeditorial.com

Primera Edición: 2026

Derechos de autor/Copyright:

Editorial: Atik Editorial

Materia Dewey: 516 - Geometría

Clasificación Thema: PBM - Geometría | PBMW - Geometría algebraica | UY - Informática

Público objetivo: Profesional/Académico

BISAC: MAT012000

Colección: Matemáticas

Soporte: Digital

Formato: Epub (.epub)/PDF (.pdf)

Publicado: 2026-08-17

ISBN: 978-9907-820-14-0

Disponible para su descarga gratuita en <http://atikeditorial.com>

El presente libro tienen el aval del Centro de Investigaciones en Ciencias y Humanidades
desde América Latina - CICSHAL.



Título: Del plano cartesiano al hiperespacio. Un modelo para visualizar hipersuperficies en 5D con
Matemática

*From the Cartesian Plane to Hyperspace. A Model for Visualizing Hypersurfaces in 5D with
Mathematica*

*Do plano cartesiano ao hiperespaço. Um modelo para visualizar hipersuperfícies em 5D com
Matemática*

(APA 7)

Jiménez Vilcherrez, J. K., Velezmoro León, R., Sosa Gonzales, V. B., Correa Morocho, R., & Ramírez Carrasco, M. C. (2026). *Del plano cartesiano al hiperespacio. Un modelo para visualizar hipersuperficies en 5D con Mathematica*. Atik Editorial. <https://doi.org/10.46652/atikbook37>



Este título se publica bajo una licencia de Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0) la cual está disponible en: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.es>

Se debe dar crédito de manera adecuada, brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.

Las consultas relativas a la reproducción fuera del ámbito de esta licencia deberán enviarse al Departamento de Comunicación y Difusión Científica de CICS HAL a la siguiente casilla de correo: info@atikeditorial.com

Los enlaces a sitios web de terceros son facilitados por **Atik** Editorial de buena fe y a título meramente informativo. **Atik** Editorial declina toda responsabilidad por el material contenido en cualquier sitio web de terceros al que se haga referencia en esta obra.

Esta publicación es una obra derivada que surge de la tesis de maestría titulada "Modelo geométrico 5D para el estudio de las hipersuperficies cilíndricas y parabólicas con Mathematica", defendida por Judith Keren Jiménez Vilcherrez en la Universidad Nacional de Piura (Perú) en el año 2024. Bajo la coordinación del propio autor de la tesis, un equipo de investigadores ha ampliado, profundizado y actualizado el trabajo original mediante un proceso colaborativo, dando lugar a este libro.

This publication is a derivative work originating from the master's thesis titled "Modelo geométrico 5D para el estudio de las hipersuperficies cilíndricas y parabólicas con Mathematica", defended by Judith Keren Jiménez Vilcherrez at the Universidad Nacional de Piura (Perú) in 2024. Under the coordination of the thesis author himself, a team of researchers has expanded, deepened, and updated the original work through a collaborative process, resulting in this book.

AVAL DE REVISIÓN POR PARES

El presente libro constituye el resultado de un riguroso proceso de investigación académica, cuya calidad metodológica y solidez argumental han sido validadas mediante un sistema de revisión por pares externos implementado bajo el protocolo de doble ciego, bajo la supervisión del Centro de Investigaciones en Ciencias y Humanidades desde América Latina (CICSHAL). Como garantía de transparencia y rigor científico, los informes de evaluación realizados por los especialistas designados se conservan en el archivo institucional de la editorial, a disposición de las instancias que así lo requieran.

This book is the result of a rigorous academic research process, whose methodological quality and argumentative solidity have been validated through an external peer-review system implemented under a double-blind protocol, under the supervision of the Center for Research in Sciences and Humanities from Latin America (CICSHAL). As a guarantee of transparency and scientific rigor, the evaluation reports prepared by the designated specialists are preserved in the publisher's institutional archives, available to any party that may require them.

info@atikeditorial.com



AUTORES

AUTHORS

- Judith Keren Jiménez Vilcherrez

Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú

<https://orcid.org/0000-0002-7823-1533>

jjimenezv@unp.edu.pe

judithkeren@hotmail.com

Doctora en Matemática y docente en la Universidad Nacional de Piura, especializada en Inteligencia Artificial y educación matemática. Cuenta con experiencia en publicaciones científicas en congresos internacionales.

- Ricardo Velezmoro León

Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú

<https://orcid.org/0000-0002-2582-8264>

rvelezmorol@unp.edu.pe

velezmoro_ricardo@hotmail.com

Matemático y docente universitario, especializado en geometría diferencial y cálculo simbólico. Su investigación se enfoca en la modelación y visualización de estructuras geométricas en dimensiones superiores mediante herramientas computacionales. Cuenta con diversas publicaciones científicas que integran matemática pura y computación simbólica.

- Víctor Bernardo Sosa Gonzales

Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú

<https://orcid.org/0000-0002-0519-257X>

doc.loc.fc01@unp.edu.pe

madaide0205@gmail.com

Matemático y docente de la Universidad Nacional de Piura. Cuenta con grado de magister y experiencia en la enseñanza universitaria de cursos de matemática básica, cálculo y optimización en ingeniería. Su labor académica se centra en la formación matemática aplicada y el desarrollo de materiales didácticos para estudiantes universitarios.

- Reucher Correa Morocho

Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú

<https://orcid.org/0000-0001-5619-3989>

rcorream@unp.edu.pe

racorreamo@gmail.com

Ingeniero Industrial, Magister en Ciencias, Doctor en Tecnologías de la Información y Comunicaciones, Doctor en Ciencias Administrativas y Doctor en Economía. Investiga en las áreas de Inteligencia Artificial y Computación Cuántica. Docente Universitario de pre y posgrado.

- María Cristina Ramírez Carrasco

Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú

<https://orcid.org/0000-0002-6330-7232>

mramirez@unp.edu.pe

mcristinarc615@gmail.com

Doctora en Ciencias de la Educación, Magíster en Matemática Aplicada y Matemática de profesión. Catedrática en la Universidad Nacional de Piura con amplia experiencia en la enseñanza universitaria. Interesada en la investigación científica orientada al fortalecimiento de los procesos educativos.

RESUMEN

Este libro presenta un modelo geométrico para visualizar objetos en la quinta dimensión, específicamente hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparabólicas, utilizando el software Mathematica. La obra guía al lector desde los fundamentos de la geometría analítica en el plano cartesiano hasta las técnicas avanzadas de inmersión que permiten proyectar objetos pentadimensionales en el espacio tridimensional. A través del estudio sistemático de curvas paramétricas, superficies básicas y propiedades estructurales del hipercilindro y el hiperparaboloide en 4D y 5D, el autor demuestra cómo la computación simbólica y la visualización interactiva transforman nuestra capacidad para comprender estructuras que trascienden la intuición espacial tridimensional. La obra constituye una contribución significativa al campo de la geometría computacional y ofrece herramientas prácticas para investigadores y estudiantes interesados en dimensiones superiores.

Palabras clave:

geometría pentadimensional; inmersión; hipersuperficies; Mathematica; visualización geométrica.

ABSTRACT

This book presents a geometric model for visualizing objects in the fifth dimension, specifically hypercylindrical and hyperparabolic hypersurfaces, using the Mathematica software. The work guides the reader from the fundamentals of analytic geometry in the Cartesian plane to the advanced immersion techniques that allow projecting pentadimensional objects into three-dimensional space. Through the systematic study of parametric curves, basic surfaces, and structural properties of the hypercylinder and the hyperparaboloid in 4D and 5D, the author demonstrates how symbolic computation and interactive visualization transform our capacity to understand structures that transcend three-dimensional spatial intuition. The work constitutes a significant contribution to the field of computational geometry and offers practical tools for researchers and students interested in higher dimensions.

Keywords:

pentadimensional geometry; immersion; hypersurfaces; Mathematica; geometric visualization.

RESUMO

Este livro apresenta um modelo geométrico para visualizar objetos na quinta dimensão, especificamente hipersuperfícies hipercilíndricas e hiperparabólicas, utilizando o software Mathematica. A obra guia o leitor desde os fundamentos da geometria analítica no plano cartesiano até as técnicas avançadas de imersão que permitem projetar objetos pentadimensionais no espaço tridimensional. Por meio do estudo sistemático de curvas paramétricas, superfícies básicas e propriedades estruturais do hipercilindro e do hiperparabolóide em 4D e 5D, o autor demonstra como a computação simbólica e a visualização interativa transformam nossa capacidade de compreender estruturas que transcendem a intuição espacial tridimensional. A obra constitui uma contribuição significativa para o campo da geometria computacional e oferece ferramentas práticas para pesquisadores e estudantes interessados em dimensões superiores.

Palavras-chave:

geometria pentadimensional; imersão; hipersuperfícies; Mathematica; visualização geométrica.

CONTENIDO

Aval de revisión por pares	6
Resumen	10
Abstract	11
Resumo	11
Introducción	17
Los fundamentos de la representación geométrica	23

CAPÍTULO 1

Sistemas alternativos y sus aplicaciones	26
El salto a la tercera dimensión y el desafío de dimensiones superiores	30
Relevancia y alcance de la propuesta de investigación	32

CAPÍTULO 2

La visualización de objetos geométricos en dimensiones superiores	36
Antecedentes y fundamentos de la visualización multidimensional	38
Técnicas de proyección e inmersión de objetos geométricos	41
Análisis de coplanaridad en espacios de dimensión superior	46
Algoritmo para verificar si n puntos en $\mathbb{R}^m$ son coplanares	46
Visualización de objetos tetradimensionales mediante inmersión tetraédrica	48
Producto cruz en $\mathbb{R}^4$	50
Criterio para que una curva sea plana en $\mathbb{R}^4$	51
El Hipercilindro en 4D	51
Teorema 1	51
Curvas paramétricas en el hipercilindro en 4D	53
Teorema 2	54
Las curvas paramétricas u_3	55
Algunas familias de curvas especiales en el Hipercilindro 4D	56
Familia de curvas de espirales esféricas	58
Familia de curvas cerradas en superficies Esféricas	59
Superficies básicas en el Hipercilindro 4D	61
Teorema 3	62
Teorema 4	64
El Hiperparaboloide en 4D	67
Teorema 5	67
Curvas paramétricas en el Hiperparaboloide en 4D	68
Teorema 6	78
Teorema 7	78
Conceptos fundamentales y reflexiones finales sobre la visualización	82

CAPÍTULO 3

La exploración metodológica de las hipersuperficies en la quinta dimensión	86
La construcción de un modelo geométrico pentadimensional	88
Herramientas computacionales y consideraciones éticas en la investigación geométrica	91

Capítulo 4

Los fundamentos del modelo geométrico pentadimensional	95
La inmersión como herramienta fundamental para la visualización pentadimensional	98
El hipercilindro pentadimensional y sus propiedades estructurales	101
Las curvas paramétricas del hipercilindro pentadimensional	102
Otras curvas en el Hipercilindro 5D	106
Las familias de esferas están en las Hiperesferas 4D, la cuales a la vez están en el Hipercilindro 5D	124
El Hiperparaboloide en 5D	131
Teorema 9	131
Las curvas u_i , $i = 1, 2, 3, 4$ paramétricas en el Hiperparaboloide 5D	133
Las Superficies $u_i u_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ paramétricas en el Hiperparaboloide 5D	142
Las Hipersuperficies $4D u_i u_j u_k$, $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ en el Hipercilindro 5D	148

CAPÍTULO 5

Reflexiones finales sobre la visualización de hipersuperficies en espacios de alta dimensión	157
--	-----

REFERENCIAS

163

LISTADO DE FIGURAS

Figura 1. Coordenadas rectangulares	25
Figura 2. Sistema de coordenadas polares	27
Figura 3. (a) Sistema de Coordenadas Oblicuo Paralelo (b) Sistema de Coordenadas Oblicuo-Perpendiculares	29
Figura 4. Sistema de coordenadas trilineales	30
Figura 5. Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio	31
Figura 6. Direcciones de los ejes coordenados	41
Figura 7. Gráfico de la hélice mediante la inmersión y sus ejes coordenados	43
Figura 8. Los paralelos en una esfera 3D	44
Figura 9. Los meridianos en una esfera 3D	45
Figura 10. El mallado en una esfera 3D en base a las curvas u y v paramétricas	45

Figura 11. Los ejes junto al tetraedro	49
Figura 12. Los ejes 4D	50
Figura 13. Paralelos en familias de esferas	54
Figura 14. Meridianos en familias de esferas que habitan en un hipercilindro 4D	55
Figura 15. Rayos paralelos al plano de giro que habitan en un hipercilindro 4D	56
Figura 16. El esqueleto del hipercilindro 4D	56
Figura 17. Familia de curvas de Viviani en el hipercilindro 4D	58
Figura 18. Familia de espirales esférica en un hipercilindro 4D	59
Figura 19. Familia de curvas de cerradas en el hipercilindro 4D	61
Figura 20. Familia de superficies esféricas en el hipercilindro 4D	62
Figura 21. Familia de superficies cilíndricas en el hipercilindro 4D	64
Figura 22. Una superficie cilíndrica con su eje de giro	65
Figura 23. Otra familia de superficies cilíndricas en el hipercilindro 4D	66
Figura 24. Meridianos en familias de esferas dentro de un Hiperparaboloide 4D	69
Figura 25. Paralelos en familias de esferas que habitan en un Hiperparaboloide 4D	70
Figura 26. Familia de parábolas que habitan en un Hiperparaboloide 4D	71
Figura 27. El esqueleto del Hiperparaboloide en la cuarta dimensión	71
Figura 28. Familia de curvas de Viviani en un Hiperparaboloide 4D	73
Figura 29. Familia de espirales esférica en un Hiperparaboloide 4D	74
Figura 30. Familia de curvas abiertas en el Hiperparaboloide 4D.	76
Figura 31. Familia de esferas en el Hiperparaboloide 4D	77
Figura 32. Familia de esferas en el Hiperparaboloide 4D	80
Figura 33. Familia de paraboloides 3D en el Hiperparaboloide 4D	81
Figura 34. Otra familia de paraboloides 3D en el Hiperparaboloide 4D	82
Figura 35. Modelo geométrico 5D	97
Figura 36. Los paralelos involucrados en un Hipercilindro 5D	103
Figura 37. Meridianos en cada esfera que habitan en un Hipercilindro 5D	104
Figura 38. Polos locales en cada Hiperesfera 4D que habitan en un Hipercilindro 5D	105
Figura 39. Rayos pertenecientes a hipercilindros 4D que habitan en un Hipercilindro 5D	106
Figura 40. Hélices esféricas dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D	107
Figura 41. Meridianos dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D	108
Figura 42. Gráfico de la Curva C5	109
Figura 43. Gráfico de la Curva C6	110
Figura 44. Gráfico de la Curva C7	111
Figura 45. Esferas en el Hipercilindro 5D	112
Figura 46. Dos familias de esferas en el Hipercilindro 5D	114
Figura 47. Dos familias de esferas junto al Hipercilindro 5D	114
Figura 48. Polos norte y sur de las esferas en Sur1[[2]] y Sur1[[8]]	117
Figura 49. Polos norte y sur de las esferas y el rectángulo que los contiene	118
Figura 50. Familia de esferas junto al Hipercilindro 5D	119
Figura 51. Esferas en Hipercilindro 5D	120
Figura 52. Cilindros en Hipercilindro 5D	121
Figura 53. Esfera en el Hipercilindro 5D	122
Figura 54. Esfera en el Hipercilindro 5D	123

Figura 55. Dos esferas en el Hipercilindro 5D	123
Figura 56. Familia de esferas u_2u_3 en el Hipercilindro 5D	124
Figura 57. Familia de cilindros u_2u_4 en el Hipercilindro 5D	125
Figura 58. Familia de cilindros u_3u_4 en el Hipercilindro 5D	126
Figura 59. Una Hiperesfera 4D que está dentro del Hipercilindro 5D	127
Figura 60. La Hiperesfera 4D junto con gcurvu3 en el Hipercilindro 5D	128
Figura 61. Un cilindro 4D que está dentro del Hipercilindro 5D	129
Figura 62. La Hiperesfera 4D junto con gcurvu4 en el Hipercilindro 5D	129
Figura 63. Un hipercilindro 4D que está dentro del Hipercilindro 5D	131
Figura 64. Otro hipercilindro 4D junto con gcurvu4 en el Hipercilindro 5D	131
Figura 65. Los paralelos involucrados en un Hiperparaboloide 5D	134
Figura 66. Meridianos en cada Hiperesfera 4D que habitan en un Hiperparaboloide 5D	135
Figura 67. Meridianos es esferas 3D que habitan en un Hiperparaboloide 5D	136
Figura 68. Parábolas en un Paraboloide 4D que habitan en un Hiperparaboloide 5D	137
Figura 69. Hélices esféricas dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D	138
Figura 70. Meridianos dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D	139
Figura 71. Gráfico de la familia de CurvaC3	140
Figura 72. Gráfico de la CurvaC4	140
Figura 73. Gráfico de la CurvaC6	141
Figura 74. Gráfico de la CurvaC6	142
Figura 75. Hiperesferas 4D en el Hiperparaboloide 5D	143
Figura 76. Esferas en Hiperparaboloide 5D	144
Figura 77. Paraboloide 3D en el Hiperparaboloide 5D	145
Figura 78. Esferas3D en Hiperesferas 4D en Hiperparaboloide 5D	146
Figura 79. Familia de paraboloide u_2u_4 en el Hiperparaboloide 5D	147
Figura 80. Familia de cilindros u_3u_4 en el Hipercilindro 5D	148
Figura 81. Una Hiperesfera 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D	150
Figura 82. Otra Hiperesfera 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D	151
Figura 83. Las dos Hiperesferas 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D	151
Figura 84. Un Hiperparaboloide 4D que está dentro del Hipercilindro 5D	153
Figura 85. El Hiperparaboloide 4D junto con gcurvu4 en el Hiperparaboloide 5D	153
Figura 86. Un Hiperparaboloide 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D	155
Figura 87. Un Hiperparaboloide 4D que está dentro del gcurvu4	155

Introducción

La geometría analítica, esa disciplina fundacional que articula el álgebra y la geometría mediante el método de las coordenadas, ha sido durante siglos el lenguaje a través del cual la humanidad ha logrado describir y comprender las formas del espacio que habita. Desde los primeros desarrollos de René Descartes hasta las sofisticadas aplicaciones contemporáneas, este campo del conocimiento ha evolucionado de manera constante, ampliando sus horizontes más allá de los límites que la intuición sensorial impone. El lector tiene ahora en sus manos una obra que se inscribe en esta tradición de expansión conceptual, pero que al mismo tiempo representa un salto cualitativo al adentrarse en territorios que, hasta hace pocas décadas, permanecían reservados exclusivamente al ámbito de la abstracción matemática más pura.

El presente libro, fruto de la investigación doctoral de Jiménez Vilcherrez, constituye una contribución significativa al estudio de los objetos geométricos inmersos en espacios de dimensionalidad superior, particularmente en la cuarta y quinta dimensiones. La obra conduce al lector desde los fundamentos más elementales de la representación geométrica hasta la construcción de un modelo pentadimensional para la visualización de hipersuperficies cilíndricas y paraboloidales, utilizando como herramienta computacional el software especializado Mathematica. Esta progresión didáctica no es casual, sino que responde a una concepción pedagógica que concibe el conocimiento matemático como un edificio que se erige sobre cimientos sólidos, donde cada nuevo nivel de comprensión se apoya en los logros alcanzados en las etapas precedentes.

El recorrido comienza con el establecimiento de las bases necesarias para emprender este viaje intelectual, presentando una revisión exhaustiva de los sistemas de coordenadas que han sido desarrollados a lo largo de la historia de la geometría analítica. El lector encontrará aquí un recorrido que parte del sistema de coordenadas rectangulares en el plano, ese universo bidimensional donde puntos y curvas encuentran su representación más accesible, para luego explorar sistemas alternativos como las coordenadas polares, las oblicuas y las trilineales, cada una de las cuales ofrece ventajas particulares para abordar problemas específicos. Esta diversidad de sistemas de referencia, lejos de ser un capricho matemático, responde a la necesidad de adaptar el instrumental analítico a la naturaleza de los objetos estudiados, revelando así la profunda conexión entre la elección del sistema de coordenadas y la simplicidad o complejidad de las ecuaciones resultantes. El recorrido culmina con la extensión natural de estos principios al espacio tridimensional y plantea la pregunta que motiva toda la indagación: ¿es posible trascender la tercera dimensión y concebir objetos en espacios de cuatro o cinco dimensiones?

A partir de estos fundamentos, la obra se adentra en el corazón de la problemática, abordando la visualización de objetos geométricos en espacios tetradimensionales y pentadimensionales. Aquí el autor nos introduce en las técnicas de inmersión, esos procedimientos matemáticos que permiten proyectar objetos de alta dimensionalidad en espacios de menor dimensión, haciendo posible su representación gráfica y, por ende, su observación y análisis. Se revisan los antecedentes más relevantes en este campo, desde los paquetes de Mathematica desarrollados por Velezmoro para visualizar objetos 4D hasta las investigaciones de Lone y colaboradores sobre curvas de intersección en $\mathbb{R}^5$, pasan-

do por las contribuciones de Anto y colaboradores con su paquete 4DPlots para hipersuperficies implícitamente definidas. Esta revisión de la literatura no es meramente erudita, sino que cumple la función de situar la investigación en el contexto de un campo en plena efervescencia, donde la computación simbólica y la visualización interactiva están transformando nuestra capacidad para comprender estructuras que antes solo existían en el ámbito de la especulación teórica. La exposición culmina con la presentación de las técnicas de inmersión tetraédrica para objetos 4D y el análisis detallado del hipercilindro y el hiperparaboloide en esta dimensión, sentando las bases para la extensión a la quinta dimensión que constituye el núcleo de la obra.

En continuidad con lo anterior, se aborda la dimensión metodológica de la investigación, presentando el enfoque, diseño y procedimientos que guiaron el desarrollo del modelo geométrico pentadimensional. El autor opta por un enfoque cuantitativo de carácter formal y computacional, donde los objetos de estudio son las propias hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparaboidales en la quinta dimensión, abordadas como entidades matemáticas definidas por ecuaciones paramétricas y cartesianas. El diseño no experimental y de nivel descriptivo se justifica por la naturaleza de los objetos bajo investigación, que no son susceptibles de manipulación experimental en el sentido tradicional, sino que requieren una aproximación sistemática basada en el cálculo simbólico y la visualización computacional. Se detalla el procedimiento seguido, que incluye la identificación de la información necesaria, el estudio de los modelos de visualización 3D y 4D, la formulación de las ecuaciones de inmersión para 5D y la utilización del software Mathematica para los cálculos y visualizaciones. Las consideraciones éticas, incluyendo el uso de software con licencia legal y la

originalidad de los programas computacionales desarrollados, cierran esta sección metodológica, ofreciendo al lector una visión completa del riguroso proceso que sustenta los resultados presentados en la obra.

El núcleo de la investigación se presenta a continuación, mostrando el modelo geométrico pentadimensional que permite visualizar entes geométricos en la quinta dimensión. El autor propone un modelo basado en un cubo centrado en el origen, cuyos vértices sirven como referencia para la proyección de objetos más complejos. La inmersión de 5D en 3D se define mediante una transformación lineal que proyecta cualquier punto del espacio pentadimensional en un punto del espacio tridimensional, preservando ciertas propiedades métricas y topológicas que hacen posible un análisis geométrico significativo. A partir de este modelo, se desarrolla la parametrización del hipercilindro pentadimensional, demostrando su ecuación cartesiana y explorando sus curvas paramétricas básicas. El lector encontrará aquí un despliegue visual impresionante, donde las figuras que acompañan al texto revelan la estructura del hipercilindro 5D a través de sus paralelos, meridianos y otras familias de curvas, así como las superficies básicas que lo constituyen. El estudio continúa con el hiperparaboloide pentadimensional, siguiendo una estructura análoga que permite apreciar las similitudes y diferencias entre estos dos objetos fundamentales. La caracterización de las hipersuperficies 4D involucradas en la conformación de los objetos pentadimensionales completa esta sección, ofreciendo una visión integrada de la estructura jerárquica de los espacios de alta dimensión.

Finalmente, la obra recoge las conclusiones y recomendaciones derivadas de la investigación, sintetizando los logros alcanza-

dos y señalando caminos para futuras exploraciones. Se destaca la construcción de nuevas inmersiones para graficar hipersuperficies en 4D y 5D, la caracterización de las curvas paramétricas que definen el esqueleto del hipercilindro y el hiperparaboloide en ambas dimensiones, la generación de superficies básicas intrínsecas a estas hipersuperficies, y el uso fundamental del software Mathematica como herramienta de observación y descripción. Las recomendaciones invitan a los interesados a familiarizarse con las técnicas de inmersión para mejorar la presentación de gráficos en más dimensiones, a aplicar la estrategia desarrollada al estudio de hiperelipsoides e hiperboloides, a explorar otros tipos de hipersuperficies no provenientes de ecuaciones cuadráticas, y a considerar el uso de software libre como MAXIMA y OCTAVE para evitar problemas de licenciamiento.

El libro que el lector tiene en sus manos no es, sin embargo, un mero compendio de resultados técnicos. Es, ante todo, una invitación a expandir los horizontes de la imaginación geométrica, a atreverse a pensar más allá de las tres dimensiones que nuestra experiencia cotidiana nos ha hecho tan familiares. La posibilidad de diseñar un modelo geométrico 5D para el estudio de hipersuperficies cilíndricas y paraboloides, y visualizarlos con el software Mathematica, abre nuevas vías para la exploración de estructuras que, aunque distantes de nuestra experiencia sensorial, son fundamentales para la comprensión de las leyes que rigen el universo matemático. Que esta obra sirva, pues, como una guía y una inspiración para todos aquellos que, fascinados por la belleza de la geometría, deseen aventurarse en los territorios inexplorados de la quinta dimensión.

01 Capítulo

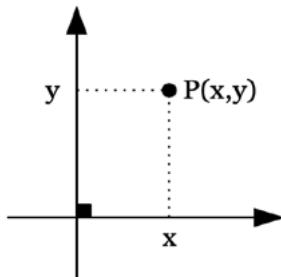
*Los fundamentos de la representación
geométrica*

La geometría analítica, como disciplina fundamental dentro de las matemáticas, establece un puente indispensable entre el álgebra y la geometría al permitir la descripción de figuras geométricas mediante ecuaciones y coordenadas. Esta sinergia metodológica ha demostrado ser extraordinariamente fértil, proporcionando un marco de trabajo robusto para abordar problemas tanto en matemáticas puras como en sus innumerables aplicaciones a la física, la ingeniería y otras ciencias. En los niveles iniciales de formación universitaria, el estudio de esta disciplina suele comenzar con el sistema de coordenadas rectangulares, también conocido como plano cartesiano, el cual ofrece la ventaja pedagógica y práctica de que sus vectores base son constantes, simplificando significativamente el análisis de las propiedades geométricas de curvas y superficies. Este sistema se erige como el punto de partida natural, gracias a su estructura ortogonal que facilita la comprensión de conceptos fundamentales como la distancia entre puntos, la pendiente de una recta o la ecuación de una circunferencia. Por ejemplo, al estudiar la trayectoria de un proyectil, el plano cartesiano permite descomponer el movimiento en sus componentes horizontal y vertical de manera intuitiva.

La construcción axiomática de este modelo se fundamenta en la consideración de dos rectas perpendiculares: una de orientación horizontal y otra vertical, que se intersectan en un punto denominado origen de coordenadas. A estas rectas se les designa como ejes coordenados, donde la recta horizontal recibe el nombre de Eje X o Eje de las abscisas, y la recta vertical es conocida como Eje Y o Eje de las ordenadas. Esta configuración ortogonal no es arbitraria, sino que responde a la necesidad de establecer un sistema de referencia que sea a la vez simple y poderoso para la localización precisa de puntos en el plano. Lehmann (1989), en

su obra clásica sobre geometría analítica, explica con claridad que cualquier punto (P) en este plano queda inequívocamente identificado mediante un par ordenado $((x, y))$ de números reales. La primera componente, (x) , cuantifica la distancia dirigida desde el punto al eje de las ordenadas, mientras que la segunda componente, (y) , mide la distancia al eje de las abscisas. Esta correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números reales es la esencia misma del sistema, garantizando que cada punto tenga una representación única y, recíprocamente, que cada par ordenado defina un punto específico, como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1. Coordenadas rectangulares



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

La formalización matemática de este espacio se expresa mediante el conjunto $(\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\})$, que constituye el producto cartesiano de la recta real consigo misma. Este modelo bidimensional no solo es una herramienta de cálculo, sino que también sirve como un potente recurso heurístico para visualizar relaciones funcionales y transformaciones geométricas. Sin embargo, a pesar de su utilidad y omnipresencia en la enseñanza, el sistema de coordenadas rectangulares no es el único ni siempre el más adecuado para

abordar todos los problemas geométricos. Existen numerosas situaciones, especialmente aquellas que involucran simetrías radiales, trayectorias curvas o sistemas con restricciones particulares, donde otros sistemas de coordenadas pueden ofrecer ventajas sustanciales al simplificar las ecuaciones y revelar la estructura intrínseca de los objetos estudiados.

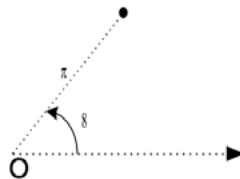
Sistemas alternativos y sus aplicaciones

En este contexto, la exploración de sistemas de coordenadas alternativos se convierte en una necesidad metodológica para el matemático y el científico. Entre estos, el sistema de coordenadas polares, el sistema de coordenadas oblicuas y el sistema de coordenadas trilineales destacan por su capacidad para adaptarse a diferentes simetrías y problemas específicos. Como señala Aguilar (2022), el sistema polar, aunque comparte el objetivo fundamental de la representación gráfica con el sistema cartesiano, lo hace mediante un enfoque radicalmente distinto. En lugar de utilizar distancias a ejes ortogonales, el sistema polar emplea un par de coordenadas que conjugan magnitud y dirección: un segmento conocido como radio vector y un ángulo denominado argumento. Este enfoque resulta particularmente eficaz para describir curvas que poseen simetría central o que son generadas por movimientos de rotación, como las espirales, los cardioides o las trayectorias de partículas en campos de fuerza central, donde las ecuaciones en coordenadas polares adquieren una elegancia y simplicidad que contrastan con su compleja expresión en coordenadas cartesianas.

La definición operativa del sistema de coordenadas polares se basa en dos elementos fundamentales: un punto fijo llamado polo, que actúa como origen, y una recta fija que parte de este punto y recibe el nombre de eje polar. La posición de un punto cualquiera en el plano queda entonces determinada por su distancia al polo (el radio vector) y por el ángulo que forma el segmento que une el polo con el punto con respecto al eje polar. Una de las características más distintivas y, a la vez, más desafiantes de este sistema es que, a diferencia de las coordenadas cartesianas, la representación de un punto no es única. Un mismo punto puede ser descrito por múltiples pares de coordenadas polares, simplemente añadiendo o restando múltiplos de (2π) al ángulo o incluso considerando radios negativos que indican una dirección opuesta, como se muestra en la Figura 2. Esta no unicidad, lejos de ser una debilidad, refleja la naturaleza periódica y circular del sistema y es fundamental para la descripción de fenómenos oscilatorios y ondulatorios. Por ejemplo, en el estudio del movimiento armónico simple o en el análisis de señales, esta propiedad permite una representación más natural y compacta de las funciones trigonométricas.

Figura 2. Sistema de coordenadas polares

□□□□□

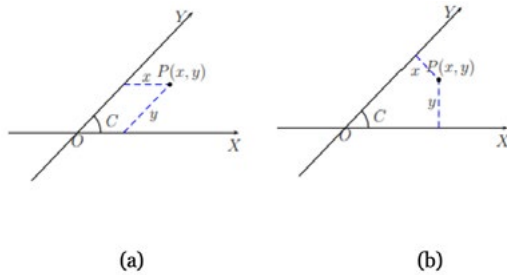


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Por otro lado, el sistema de coordenadas oblicuas ofrece una generalización del sistema cartesiano que relaja la condición de

perpendicularidad entre los ejes. En este sistema, el plano es definido por dos rectas que se interceptan formando un ángulo agudo (θ) , lo que da lugar a una infinidad de sistemas oblicuos posibles, cada uno caracterizado por el valor específico de este ángulo. Esta flexibilidad es especialmente valiosa cuando se estudian fenómenos que ocurren en medios anisotrópicos o cuando las condiciones de contorno de un problema se definen naturalmente sobre direcciones no ortogonales, como ocurre en ciertos problemas de cristalografía o en la mecánica de fluidos. La posición de un punto (P) se representa mediante el par (x, y) , pero la interpretación de estas coordenadas varía según la clasificación del sistema oblicuo. En los sistemas oblicuos paralelos, (x) e (y) representan las longitudes de los segmentos que, partiendo de (P) , van a parar a los ejes coordenados mediante rectas paralelas a los ejes opuestos. En contraste, en los sistemas oblicuos perpendiculares, (x) e (y) representan las distancias perpendiculares desde el punto (P) a cada uno de los ejes coordenados, una definición que guarda una mayor similitud conceptual con el sistema cartesiano, pero que opera en un marco de referencia no ortogonal, como puede observarse en la Figura 3.

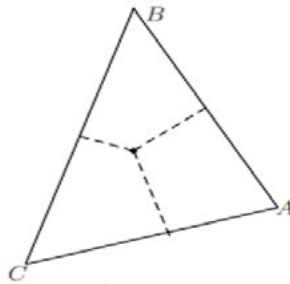
Figura 3. (a) Sistema de Coordenadas Oblicuo Paralelo (b) Sistema de Coordenadas Oblicuo-Perpendiculares



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Un tercer sistema de gran interés, especialmente en geometría proyectiva y en la resolución de problemas de optimización con restricciones lineales, es el sistema de coordenadas trilineales. Este sistema se aleja de la idea de ejes lineales y adopta un triángulo como figura de referencia fundamental. En lugar de medir distancias a rectas que se cruzan en un punto, las coordenadas trilineales de un punto (P) están dadas por las distancias (generalmente perpendiculares) a cada uno de los tres lados del triángulo de referencia. Este enfoque está intrínsecamente ligado a la geometría del triángulo y resulta de una elegancia y potencia notables para tratar problemas relacionados con cevianas, puntos notables como el incentro o el baricentro, y para expresar de manera homogénea y simétrica ecuaciones de rectas y cónicas con respecto a los vértices del triángulo base, tal como se representa en la Figura 4. La naturaleza de este sistema lo convierte en una herramienta predilecta en áreas como la óptica geométrica y la teoría de la relatividad, donde las relaciones entre diferentes sistemas de referencia y las transformaciones proyectivas son de suma importancia.

Figura 4. Sistema de coordenadas trilineales



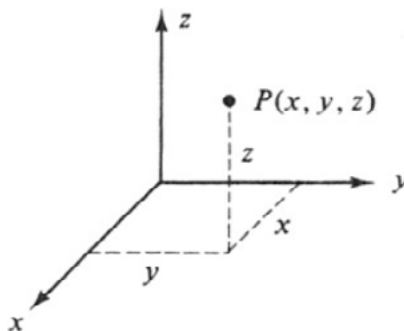
Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

El salto a la tercera dimensión y el desafío de dimensiones superiores

Es imperativo reconocer que todos los sistemas de coordenadas discutidos hasta ahora, a pesar de su indudable utilidad y sofisticación, se restringen al estudio de puntos y figuras contenidas en un plano bidimensional. Esta limitación se convierte en un obstáculo insalvable cuando el objeto de estudio trasciende las dos dimensiones y nos adentramos en el análisis del espacio tridimensional que nos rodea. La extensión de la geometría analítica al espacio es, por tanto, un paso lógico y necesario que permite modelar la realidad física con mayor fidelidad. Como señala Fuller (1999), los fundamentos y métodos desarrollados para la geometría analítica plana sirven como un modelo conceptual y metodológico para abordar la geometría analítica del espacio tridimensional, o geometría analítica sólida. Esta transición no es simplemente un aumento en el número de coordenadas, sino que implica una nueva comprensión de la posición, la distancia, los ángulos y las superficies en un entorno de mayor complejidad.

Para construir este sistema tridimensional, se consideran tres planos mutuamente perpendiculares que se intersecan en un punto común, el origen de coordenadas. Las rectas de intersección de estos planos definen los tres ejes coordenados, convencionalmente denominados X , Y y Z . La posición de un punto (P) en el espacio queda entonces determinada por sus tres coordenadas, que representan las distancias (con signo) del punto a cada uno de los tres planos coordenados, como se ilustra en la Figura 5. Este sistema, aunque poderoso, es solo el comienzo de un viaje hacia dimensiones aún más abstractas. La pregunta que surge de manera natural, y que constituye el motor de la presente indagación, es si es posible extender estos principios más allá de la tercera dimensión para concebir y estudiar objetos en espacios de cuatro o incluso cinco dimensiones. Esta interrogante no es meramente un ejercicio de abstracción matemática, sino que tiene implicaciones profundas en áreas como la teoría de cuerdas, la relatividad general y la topología de alta dimensión.

Figura 5. Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

De esta manera, la problemática central que aborda este trabajo se puede formular en los siguientes términos: ¿Será po-

sible diseñar un modelo geométrico 5D para estudiar las hipersuperficies de cinco dimensiones, en particular las hipersuperficies cilíndricas y paraboloidales, con la asistencia del software especializado Mathematica? Esta pregunta condensa el desafío de trascender la intuición geométrica tridimensional para construir una representación formal y computacionalmente manejable de objetos inmersos en un espacio de cinco dimensiones.

Relevancia y alcance de la propuesta de investigación

La justificación para abordar este problema radica en la necesidad de desarrollar herramientas conceptuales y metodológicas que permitan visualizar y comprender objetos matemáticos que habitan en espacios de dimensión superior a tres. El presente trabajo se propone, por consiguiente, desarrollar un modelo geométrico para la quinta dimensión que posibilite la visualización de objetos matemáticos inmersos en hipercilindros e hiperparaboloides. Este esfuerzo se fundamenta en los resultados previos obtenidos al escudriñar estas mismas hipersuperficies en la cuarta dimensión, las cuales fueron estudiadas mediante un modelo geométrico 4D basado en un tetraedro. La construcción de este modelo tetradimensional sirve como piedra angular y como prueba de concepto para la extensión a cinco dimensiones. Naturalmente, el proceso de construcción de las inmersiones, tanto para la cuarta como para la quinta dimensión, implica la definición rigurosa de las ecuaciones paramétricas que gobiernan a dichas hipersuperficies. Estas ecuaciones son la clave para poder manipular y explorar estos objetos de manera sistemática.

Además de la construcción del modelo, se espera que el presente trabajo sirva como una base sólida y un punto de partida para futuras investigaciones. La comunidad de matemáticos y científicos interesados en el estudio de otras hipersuperficies encontrará en este modelo geométrico un andamiaje flexible y potente, que ofrece amplias posibilidades para escudriñar una vasta gama de objetos geométricos en dimensiones superiores, más allá de los casos particulares aquí estudiados. La metodología desarrollada podría ser adaptada para el estudio de hipersuperficies como hiperesferas, hiperelipsoides o incluso objetos con topologías más complejas. El uso del software Mathematica como herramienta de apoyo es crucial, ya que permite no solo la visualización de proyecciones de estos objetos, sino también la realización de cálculos simbólicos y numéricos que serían impracticables de otra manera.

En consecuencia, se establece el siguiente objetivo general: construir un modelo geométrico 5D que permita describir hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparabólicas en cinco dimensiones y visualizarlas con el software científico Mathematica. Para alcanzar esta meta, se han definido los siguientes objetivos específicos: (i) describir y caracterizar las curvas paramétricas que constituyen el esqueleto del hipercilindro y el hiperparaboloide en el espacio 4D; (ii) generar y caracterizar las curvas y superficies intrínsecas a estas hipersuperficies en 4D; (iii) describir y caracterizar las curvas paramétricas que definen la estructura del hipercilindro y el hiperparaboloide en 5D; (iv) generar y caracterizar las curvas y superficies intrínsecas a estas hipersuperficies en 5D; (v) caracterizar las hipersuperficies de 4D que se encuentran involucradas en la conformación de los hipercilindros e hiperparaboloides en 5D; y (vi) emplear el software Mathematica

para observar y describir los objetos geométricos vinculados dentro de cada una de estas hipersuperficies.

La presente investigación se llevará a cabo en la Universidad Nacional de Piura durante el período comprendido entre 2023 y 2024, y será autofinanciada por la autora. Es importante delimitar que el espacio de estudio de este trabajo es específicamente el de cinco dimensiones, lo que implica que todos los modelos, ecuaciones y visualizaciones se desarrollarán dentro de ese marco, sin adentrarse en el estudio genérico de espacios de dimensión $\backslash(n \backslash)$, aunque se espera que la metodología sea extensible. Esta delimitación permite un enfoque profundo y concentrado en los objetos y fenómenos propios de la quinta dimensión.

02

Capítulo

*La visualización de objetos geométricos
en dimensiones superiores. Un recorrido
por los espacios R^4 y R^5*

La comprensión profunda de los objetos matemáticos que habitan en espacios de dimensión superior a tres representa uno de los desafíos más fascinantes y, a la vez, más complejos de la geometría moderna. Si bien la intuición espacial humana se encuentra naturalmente limitada a las tres dimensiones que percibimos a través de los sentidos, el desarrollo de herramientas computacionales y métodos de representación visual ha abierto una ventana hacia estos universos abstractos. Visualizar objetos en un espacio de una determinada dimensión es de gran utilidad para facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos vinculados a dichos objetos, a través de la interpretación geométrica de los mismos (Velezmoro, 2019). Este principio, que subyace a gran parte de la investigación contemporánea en geometría computacional, sostiene que la traducción de estructuras algebraicas a representaciones gráficas no solo auxilia en el descubrimiento de nuevas propiedades, sino que también actúa como un poderoso vehículo didáctico para la enseñanza de disciplinas como el álgebra lineal, la topología diferencial y la teoría de variedades.

En este contexto, el presente capítulo se propone explorar los fundamentos teóricos y prácticos que permiten la construcción de modelos visuales para objetos inmersos en espacios tetradimensionales y pentadimensionales, con un énfasis particular en el uso del software especializado Mathematica. La elección de este entorno de programación no es fortuita, ya que su robustez simbólica y numérica, combinada con sus capacidades gráficas avanzadas, lo convierten en una plataforma idónea para la experimentación y la visualización geométrica. A lo largo de las siguientes secciones, se examinarán diversas técnicas de inmersión, se analizarán las propiedades de curvas y superficies en estos espacios, y se presentarán casos concretos de objetos como el

hipercilindro y el hiperparaboloide, cuyo estudio revela patrones de simetría y comportamiento que trascienden nuestra experiencia tridimensional.

Antecedentes y fundamentos de la visualización multidimensional

El interés por representar objetos de más de tres dimensiones no es reciente, pero ha cobrado un impulso significativo con la llegada de la computación de alto rendimiento y los lenguajes de programación orientados a la matemática simbólica. Un hito relevante en esta línea de trabajo lo constituye el desarrollo de paquetes especializados como el presentado por Velezmoro (2019), que describe un nuevo paquete de Mathematica para visualizar objetos 4D, los cuales están inmersos (puntos, líneas, flechas, curvas, superficies, sólidos y superficies complejas) utilizando modelos 3D como una extensión de los modelos 2D ya establecidos. Para simular el cambio de vistas se utilizan matrices rotacionales; este enfoque permite no solo la observación estática de los objetos, sino también la interacción dinámica con ellos, rotando y escalando las proyecciones para obtener perspectivas que revelen su estructura interna. Asimismo, Velezmoro (2019), muestra las ecuaciones de la Hiperesfera 4D con algunas caracterizaciones de las curvas *ui*-paramétricas y las superficies básicas que se encuentran en ella, sentando las bases para el estudio sistemático de hipersuperficies mediante la descomposición en familias de curvas y parches.

Paralelamente, la investigación en geometría diferencial ha avanzado hacia el cálculo de propiedades intrínsecas de curvas

en dimensiones superiores. Lone et al. (2016), en su trabajo titulado “Transversal intersection curves of hypersurfaces in R^5 ”, se propusieron desarrollar algoritmos para calcular las propiedades geométricas diferenciales, como la curvatura geodésica y la torsión geodésica de la curva de intersección transversal de cuatro hipersuperficies en el espacio euclidiano R^5 . Este tipo de estudios son fundamentales para comprender cómo se comportan las trayectorias en espacios de alta dimensionalidad, lo que tiene aplicaciones potenciales en campos como la física de partículas, la cosmología y la optimización en espacios de parámetros. Sin embargo, a pesar de la riqueza de los desarrollos algebraicos, en el trabajo de Lone et al. (2016), no se muestran imágenes que puedan ser observadas y que queden completamente caracterizadas las hipersuperficies en R^5 , dejando un espacio abierto para la integración de herramientas gráficas que complementen el análisis analítico con la intuición visual.

En esta misma dirección, Anto et al. (2020), realizaron la investigación “A Mathematica Package for Plotting Implicitly Defined Hypersurfaces in R^4 ”. Este artículo describe un nuevo paquete de Mathematica, denominado 4DPlots, para trazar hipersuperficies implícitamente definidas (sólidos) utilizando una generalización del método de bisección que se aplica a funciones continuas de cuatro variables mediante bisección recursiva de segmentos contenidos en su dominio. El resultado obtenido es consistente con la notación y los resultados de Mathematica, y el desempeño del paquete se discute por medio de varios ejemplos ilustrativos e interesantes. La importancia de este desarrollo radica en que proporciona una herramienta accesible y eficiente para la visualización de sólidos en 4D, lo que facilita la exploración de propiedades topológicas y geométricas que de otro modo permanecerían

en el ámbito puramente abstracto. Esta investigación describe las bases para el desarrollo de un paquete de Mathematica para trazar hypersuperficies en el espacio pentadimensional, abriendo así una vía para la extensión de estas técnicas a dimensiones aún mayores.

La evolución de estas herramientas no se ha limitado a Mathematica, sino que también se ha explorado en entornos de código abierto. Escobar (2023), en su tesis doctoral “Comportamientos cualitativos de un sistema no lineal de Lorenz en $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$ apoyados gráficamente con software Octave”, presenta un modelo que permite la visualización de objetos geométricos 5D con Octave. No obstante, en el presente trabajo se muestra un nuevo modelo con el software Mathematica que permite mejorar la visualización de los objetos geométricos 5D, aprovechando la potencia de este lenguaje para la manipulación simbólica y la generación de gráficos de alta calidad. La elección de Mathematica no es arbitraria, sino que responde a su capacidad para manejar de manera integrada el cálculo simbólico, la programación funcional y la visualización interactiva, lo que lo convierte en un entorno privilegiado para la investigación en geometría computacional.

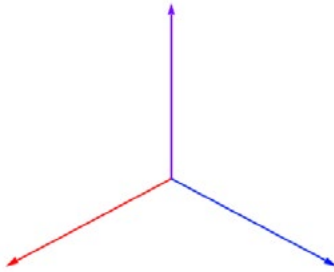
Por su parte, Facundo (2023), en su tesis de maestría “Rectas y cónicas en espacios euclidianos de dimensión mayor que dos, con asistencia del software Mathematica”, aborda el estudio de las cónicas en $\mathbb{R}^n$. Para esos objetivos, Facundo (2023), usaron algoritmos para abreviar los cálculos y también para diseñar las figuras pertinentes al tema, y dichos algoritmos serán utilizados en el desarrollo de la presente exposición. Este enfoque, que combina la eficiencia computacional con la precisión geométrica, es característico de la metodología que se adoptará en este capítulo, donde se busca no solo la descripción teórica de los objetos, sino también

su representación gráfica y la verificación de sus propiedades mediante experimentos numéricos.

Técnicas de proyección e inmersión de objetos geométricos

La representación de objetos tridimensionales en una superficie bidimensional, como una pantalla de computadora o una página impresa, es un problema clásico que ha sido resuelto mediante técnicas de proyección y perspectiva. Para obtener gráficas de curvas y superficies en una pantalla plana, es necesario realizar una inmersión, mediante tres vectores unitarios que parten desde el origen y que determinan la dirección de los ejes coordenados, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 6. Direcciones de los ejes coordenados



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Donde las direcciones están determinadas por los vectores

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \left\{ \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \{0, 1\} \right\};$$

$\vec{e}_1$: sigue la dirección del eje X

$\vec{e}_2$: sigue la dirección del eje Y

$\vec{e}_3$: sigue la dirección del eje Z

Este sistema de vectores define un marco de referencia obli-
cuo que permite proyectar puntos del espacio tridimensional
sobre el plano de la pantalla, preservando ciertas relaciones mé-
tricas y angulares que facilitan la percepción de la profundidad.
Si se desea manejar la longitud de los ejes coordenados, se puede
implementar un mini programa que escale estos vectores unita-
rios, ajustando así el tamaño de la representación gráfica según
las necesidades del usuario.

```
Axes3D[{a_, b_, c_}] :=  
Graphics[{Hue[0], Arrow[{{0, 0}, a e1}], Hue[0.65], Arrow[{{0, 0}, b e2}],  
Hue[0.75], Arrow[{{0, 0}, c e3}]}]
```

La inmersión queda definida de la siguiente manera

$$\Phi[\{x_1, x_2, x_3\}] = \left\{ -\frac{\sqrt{3}x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}x_2}{2}, -\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} + x_3 \right\}$$

con el *Mathematica*

```
{e1, e2, e3} = {{-Sqrt[3]/2, -1/2}, {Sqrt[3]/2, -1/2}, {0, 1}}  
 $\phi[\{x1_, x2_, x3_}] := \{x1, x2, x3\} \cdot \{e1, e2, e3\}$   
 $\phi[\{x1, x2, x3\}]$   
 $\left\{ -\frac{\sqrt{3} x1}{2} + \frac{\sqrt{3} x2}{2}, -\frac{x1}{2} - \frac{x2}{2} + x3 \right\}$ 
```

Se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 01

Si tenemos la hélice $\text{Helice}[t] := \left\{ \text{Cos}[t], \text{Sin}[t], \frac{t}{4} \right\}$, para graficarla mediante la inmersión hacemos lo siguiente, definimos la hélice con el software

Helice[t_] := {Cos[t], Sin[t], t/4}

Ahora aplicamos la inmersión

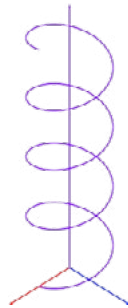
$\phi[\text{Helice}[t]]$

$$\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{3} \text{Cos}[t] + \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{Sin}[t], \frac{t}{4} - \frac{\text{Cos}[t]}{2} - \frac{\text{Sin}[t]}{2} \right\}$$

Luego con el comando que permite graficar figuras en R2 digitamos

**Show[ParametricPlot[$\phi[\text{Helice}[t]]$], {t, 0, 8 Pi}, PlotStyle → Hue[0.75], Axes → False],
Axes3D[{2, 2, 7}], PlotRange → All]**

Figura 7. Gráfico de la hélice mediante la inmersión y sus ejes coordenados



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Ejemplo 02

Según Barret (1972), para una esfera define la carta geográfica mediante

$$\vec{x}(u, v) = r \{ \text{Cos}[u] \text{Cos}[v], \text{Sin}[u] \text{Cos}[v], \text{Sin}[v] \},$$

pero en este caso tomamos el caso $r = 1$.

Esfe3D[*u*_, *v*_] := {Cos [*u*] Cos [*v*], Sin [*u*] Cos [*v*], Sin [*v*]}

también le aplicamos la inmersión

esfe2d[*u*_, *v*_] := ϕ [**Esfe3D**[*u*, *v*]]

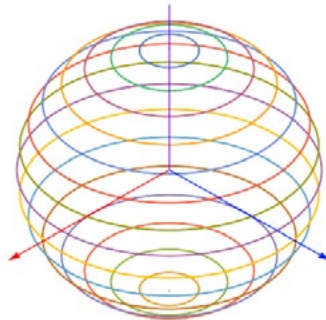
esfe2d[*u*, *v*]

$$\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u] \cos[v] + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[v] \sin[u], \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \cos[u] \cos[v] - \frac{1}{2} \cos[v] \sin[u] + \sin[v] \right\}$$

upara = **Table**[**esfe2d**[*u*, *v*], {*v*, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 16}];

gupara = **Show**[**ParametricPlot**[**upara** // **Evaluate**, {*u*, 0, 2 Pi}, **Axes** → **False**],
Axes3D[{1.5, 1.5, 1.5}]]

Figura 8. Los paralelos en una esfera 3D

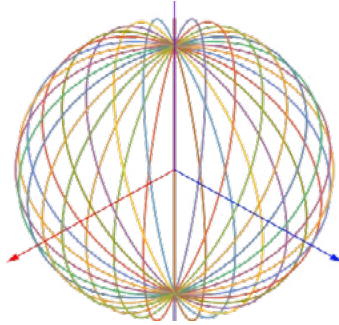


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

vpara = **Table**[**esfe2d**[*u*, *v*], {*u*, 0, 2 Pi, Pi / 16}];

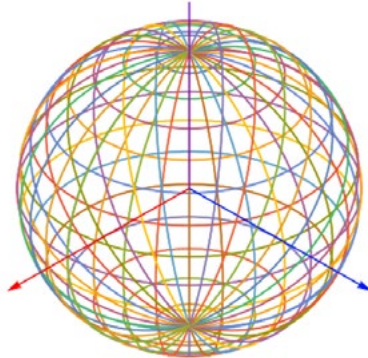
gvpara = **Show**[**ParametricPlot**[**vpara** // **Evaluate**, {*v*, -Pi / 2, Pi / 2}, **Axes** → **False**],
Axes3D[{1.5, 1.5, 1.5}], **PlotRange** → **All**]

Figura 9. Los meridianos en una esfera 3D



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Figura 10. El mallado en una esfera 3D en base a las curvas u y v paramétricas.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Show[gupara, gvpara]

Estas figuras ilustran no solo la potencia de la inmersión como herramienta de visualización, sino también la importancia de elegir adecuadamente los vectores directores para obtener representaciones que sean informativas y estéticamente claras. La elección de una base oblicua, en lugar de una proyección ortogonal estándar, permite a menudo resaltar características específicas de los objetos, como sus simetrías o sus puntos singulares,

lo que resulta de gran valor tanto en la investigación como en la docencia.

Análisis de coplanaridad en espacios de dimensión superior

Una cuestión fundamental cuando se trabaja con conjuntos finitos de puntos en espacios de dimensión mayor que dos es la determinación de si dichos puntos son coplanares. En el espacio bidimensional, cualquier conjunto de puntos es, por definición, coplanar, ya que todos pertenecen al plano que los contiene. Sin embargo, si se tiene un número finito de puntos en espacios mayores o iguales que los tridimensionales, debemos cerciorarnos para los propósitos de la investigación de que los puntos estén en un plano (Facundo, 2023). Esta verificación es esencial, por ejemplo, cuando se estudian secciones planas de hipersuperficies o cuando se busca generalizar propiedades de curvas y superficies que son intrínsecamente planas en dimensiones inferiores.

Algoritmo para verificar si n puntos en R^m son coplanares

Para este objetivo, Facundo (2023) proporciona un algoritmo que permite discernir si un conjunto de puntos es coplanares o no. El procedimiento es el siguiente: dados n puntos en R^m , $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1m})$, $P_2 = (x_{21}, ..., x_{2m})$, ..., $P_n = (x_{n1}, ..., x_{nm})$, se toman tres puntos de la lista que no sean colineales, y se forman los vectores $\vec{a_1} = P_2 - P_1$, $\vec{a_2} = P_3 - P_1$, asegurando que sean linealmente independientes. Luego, se ortonormalizan estos vectores, obteniendo $\vec{A}$ y

$\vec{B}$, que constituyen una base ortonormal del plano generado por los tres puntos iniciales. A continuación, se calcula la lista de vectores $\text{vec} = \{P_4 - P_1, P_5 - P_1, \dots, P - P_1\}$. Para cada vector en esta lista, se busca resolver el sistema de ecuaciones $\alpha_i \vec{A} + \beta_i \vec{B} = \text{vec}[i]$, $i = 1, \dots, (n-3)$. Si para todos los i se cumple que $\{\alpha_i, \beta_i\} \neq \{0,0\}$, entonces todos los puntos se encuentran en el mismo plano; en caso contrario, existe al menos un punto que no pertenece a dicho plano, lo que implica que los puntos no son coplanares.

La implementación de este algoritmo en Mathematica permite automatizar el proceso de verificación, haciendo posible el análisis de grandes conjuntos de datos con rapidez y precisión. Este programa permite introducir un número finito de puntos de un espacio de dimensiones mayores o iguales a tres y devuelve la respuesta de si son coplanares o no, lo que resulta de gran utilidad en aplicaciones prácticas, como el ajuste de superficies, la reconstrucción de objetos 3D a partir de nubes de puntos, y la validación de modelos geométricos. La capacidad de discernir la coplanaridad es también un prerrequisito para aplicar técnicas de interpolación y aproximación que requieren que los datos se encuentren estructurados en un plano, como es el caso de los métodos de elementos finitos en dominios bidimensionales inmersos en espacios de mayor dimensión.

```

PunCopl[a[lis2_] := Module[{n, P1, P2, P3, a1, a2, A, B, vec, sol, deci, const},
  n = Length[lis2]; P1 = lis2[[1]]; P2 = lis2[[2]]; P3 = lis2[[3]];
  a1 = P2 - P1; a2 = P3 - P1;
  {A, B} = Orthogonalize[{a1, a2}];
  vec = Table[lis2[[i]] - P1, {i, 4, n}] // Simplify;
  const = Table[{ $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ }.{A, B}, {i, 1, n - 3}] // Simplify;
  sol = Table[{ $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ] /. Flatten[Solve[const[[i]] == vec[[i]], { $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ }]},
    {i, 1, n - 3}] // Simplify;
  deci = Union[Table[sol[[i]] != {0, 0}, {i, 1, n - 3}]];
  If[deci == {True}, "Los puntos son coplanares",
    "Los puntos no son coplanares"]
]

```

Visualización de objetos tetradimensionales mediante inmersión tetraédrica

La extensión de las técnicas de inmersión a la cuarta dimensión presenta desafíos adicionales, pero también abre posibilidades fascinantes para la comprensión de objetos como el hipercilindro y el hiperparaboloide. Velezmoro y Ipanaque (2015), en el encuentro científico internacional ECI-2015, presentaron un modelo para graficar curvas, superficies e hipersuperficies en 4D mediante una inmersión basada en un cubo. Sin embargo, para el presente trabajo se utiliza una inmersión basada en un tetraedro, que ofrece ventajas en términos de simetría y distribución de los ejes en el espacio tridimensional de proyección.

Si tenemos los siguientes vértices de un tetraedro.

$$\{V_1, V_2, V_3, V_4\} = \left\{ \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\} \right\}$$

Los definimos con Mathematica

$$Vf1 = \left\{ \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\} \right\}$$

$$\left\{ \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

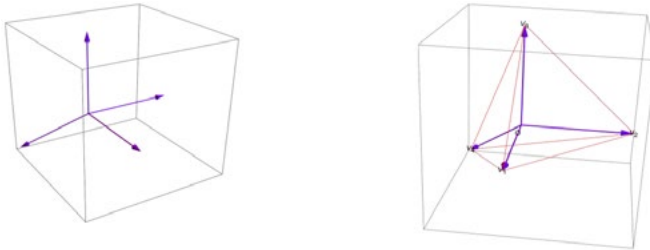
Definimos el origen de coordenadas

$$Cgn = \{0, 0, 0\}$$

Luego graficamos el modelo

```
Gvecunit = Graphics3D[ {Hue[0.75], Table[Arrow[Tube[{Cgn, Vf1[[i]]}], {i, 4}]]}
glt =
Graphics3D[
{Hue[0], Line /@ {{Vf1[[1]], Vf1[[2]]}, {Vf1[[2]], Vf1[[3]]}, {Vf1[[1]], Vf1[[3]]}, {Vf1[[4]], Vf1[[1]]},
{Vf1[[4]], Vf1[[2]]}, {Vf1[[4]], Vf1[[3]]}}, Hue[0.75],
Line /@ {{Cgn, Vf1[[1]]}, {Cgn, Vf1[[2]]}, {Cgn, Vf1[[3]]}, {Cgn, Vf1[[4]]}}, Black, Text[0, {0.2, 0, 0}],
Table[Text[Vf1[[i]], {i, 4}]]}
```

Figura 11. Los ejes junto al tetraedro.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Con los vectores unitarios definidos definimos la inmersión

Con los vectores unitarios definidos a partir de los vértices del tetraedro, se define la inmersión de 4D en 3D. Para controlar la longitud de los ejes coordenados, se introduce un factor de escala que permite ajustar la representación gráfica a las dimensiones de la pantalla o a las preferencias del usuario.

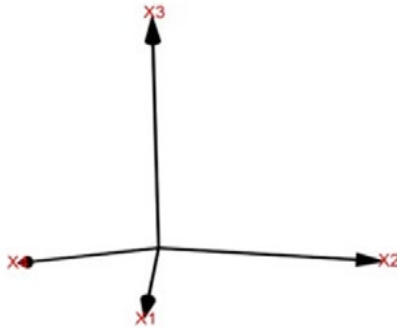
$$\phi[\{x1_ , x2_ , x3_ , x4_ \}] := \{x1, x2, x3, x4\} . Vf1$$

$$\left\{ x1 - \frac{x4}{\sqrt{3}}, x2 - \frac{x4}{\sqrt{3}}, x3 - \frac{x4}{\sqrt{3}} \right\}$$

Para controlar la longitud de los ejes coordenados definimos

```
Axes4D[{a_, b_, c_, d_}] :=
Graphics3D[{Black, Arrow[Tube[a {{0, 0, 0}, E1}]], Arrow[Tube[b {{0, 0, 0}, E2}]],
Arrow[Tube[c {{0, 0, 0}, E3}]], Arrow[Tube[d {{0, 0, 0}, E4}]], Hue[0
], Text["X1", a E1 + 0.03], Text["X2", b E2 + 0.03], Text["X3", c E3 + 0.03],
Text["X4", d E4 + 0.03]}]
Axes4D[{1, 2, 2.5, 3}]
```

Figura 12. Los ejes 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Producto cruz en $\mathbb{R}^4$

Según Vilcherrez & Poicón (2018), si se tienen los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, son vectores en el espacio $\mathbb{R}^4$, entonces el producto vectorial de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el vector:

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

Donde $e^{\rightarrow 1} = (1, 0, 0, 0)$; $e^{\rightarrow 2} = (0, 1, 0, 0)$; $e^{\rightarrow 3} = (0, 0, 1, 0)$ y $e^{\rightarrow 4} = (0, 0, 0, 1)$.

Criterio para que una curva sea plana en $\mathbb{R}^4$

Si tenemos una curva en α en $\mathbb{R}^4$, de tal modo que $\alpha'[t] \neq \{0,0,0,0\}$, $\alpha''[t] \neq \{0,0,0,0\}$ y $\alpha'''[t] \neq \{0,0,0,0\}$. Si la curva es plana entonces $\alpha'[t] \times \alpha''[t] \times \alpha'''[t] = \{0,0,0,0\}$.

El Hipercilindro en 4D

En primer lugar, definimos rotaciones en la tercera y cuarta dimensión de manera apropiada.

Rotación respecto al eje x_3 .

$$\text{Rotx3}[\theta] := \{ \{ \cos[\theta], -\sin[\theta], 0 \}, \{ \sin[\theta], \cos[\theta], 0 \}, \{ 0, 0, 1 \} \}$$

Rotación respecto a los ejes x_3 y x_4 .

$$\text{Rotx3x4}[\theta] := \{ \{ \cos[\theta], -\sin[\theta], 0, 0 \}, \{ \sin[\theta], \cos[\theta], 0, 0 \}, \{ 0, 0, 1, 0 \}, \{ 0, 0, 0, 1 \} \}$$

Teorema 1

La ecuación de un hipercilindro en forma paramétrica en la cuarta dimensión viene dada por

$$\text{HipeCili4D}[\{u1, u2, u3\}, R] = \{-R \cos[u2] \sin[u1], R \cos[u1] \cos[u2], R \sin[u2], u3\}$$

y en cartesianas es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

Demostración.

Para obtener la ecuación del cilindro tridimensional se hace rotar un segmento de recta paralelo al eje x_3 de la siguiente manera

```
Cilindro[u1_, u2_, R_] := Rotx3[u1].{R, 0, u2}
```

```
Cilindro[u1, u2, R]
```

```
{R Cos[u1], R Sin[u1], u2}
```

A continuación, basado en la definición del cilindro en la tercera dimensión definimos el hipercilindro 4D, al hacer rotar el cilindro alrededor del plano generado por los vectores $\{0,0,1,0\}$ y $\{0,0,0,1\}$, esto lo presentamos con el software Mathematica.

```
HipeCili4D[{u1_, u2_, u3_}, R_] := Rotx3x4[u2].(Prepend[Cilindro[u1, u3, R], 0])
```

```
HipeCili4D[{u1, u2, u3}, R]
```

```
{-R Cos[u1] Sin[u2], R Cos[u1] Cos[u2], R Sin[u1], u3}
```

Ahora dado que

```
HipeCili4D[{u1, u2, u3}, R][[1]]^2 + HipeCili4D[{u1, u2, u3}, R][[2]]^2 +  
HipeCili4D[{u1, u2, u3}, R][[3]]^2 // Simplify
```

```
R^2
```

Entonces significa que en coordenadas cartesianas se cumple

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

la cuál es la ecuación de un Hipercilindro en la cuarta dimensión.

A continuación, aplicaremos la inmersión, para graficarla y tener una observación de las curvas paramétricas básicas ui , $i = 1, 2, 3$ y también de las superficies básicas inmersas uij , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

Definimos con la inmersión

```
hipeCili4D[{u1_, u2_, u3_}, R_] :=  $\phi$ [HipeCili4D[{u1, u2, u3}, R]]
```

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - R \cos[u1] \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + R \cos[u1] \cos[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + R \sin[u1] \right\}$$

Curvas paramétricas en el hipercilindro en 4D

1. Las curvas paramétricas u^1

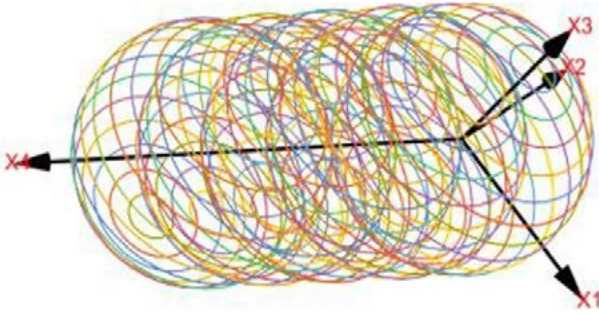
Generamos una lista donde permanece solamente el parámetro u_1

```
cpu1 =  
Partition[  
Flatten[Table[Table[hipeCili4D[{u1, u2, u3}, 1], {u2, -Pi/2, Pi/2, Pi/16}],  
{u3, 0, 2, 1/2}]], 3];
```

Y lo graficamos con

```
g1 = Show[ParametricPlot3D[cpu1 // Evaluate, {u1, 0, 2 Pi}, PlotStyle → Thickness[0.0001],  
Boxed → False, Axes → False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange → All]
```

Figura 13. Paralelos en familias de esferas.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Teorema 2

Las curvas u_1 paramétricas son curvas planas.

Demostración.

Si definimos la curva

$$\alpha' [u_1] = \text{HipeCili4D}[\{u_1, k_1, k_2\}, R]$$

entonces la primera derivada

la segunda derivada

$$\alpha''[u_1] = \{R \cos[k_1] \sin[u_1], -R \cos[k_1] \cos[u_1], 0, 0\}$$

y la tercera derivada

$$\alpha'''[u_1] = \{R \cos[k_1] \cos[u_1], R \cos[k_1] \sin[u_1], 0, 0\}$$

entonces

$$\alpha'[t] \times \alpha''[t] \times \alpha'''[t] = \{0, 0, 0, 0\}.$$

2. Las curvas paramétricas u_2

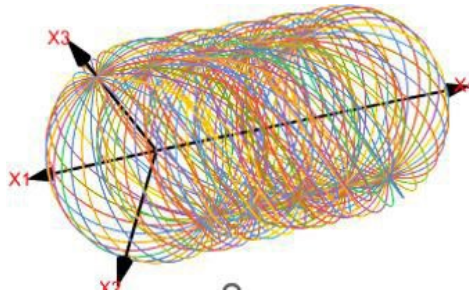
Generamos una lista donde permanece solamente el parámetro u_2

```
cpu2 =
  Partition[Flatten[Table[Table[hipeCili4D[{u1, u2, u3}, 1], {u1, 0, 2 Pi, Pi/16}],
    {u3, 0, 2, 1/2}]], 3];
```

y lo graficamos mediante

```
g2 = Show[ParametricPlot3D[cpu2 // Evaluate, {u2, -Pi/2, Pi/2},
  PlotStyle → Thickness[0.0001], Boxed → False, Axes → False],
  Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange → All]
```

Figura 14. Meridianos en familias de esferas que habitan en un hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las curvas paramétricas u_3

Generamos una lista donde permanece solamente el parámetro u_3

```
cpu3 =
  Partition[Flatten[Table[Table[hipeCili4D[{u1, u2, u3}, 1], {u1, 0, 2 Pi, Pi/8}],
    {u2, -Pi/2, Pi/2, Pi/8}]], 3];
```

Las gráficas de estas curvas se logran mediante

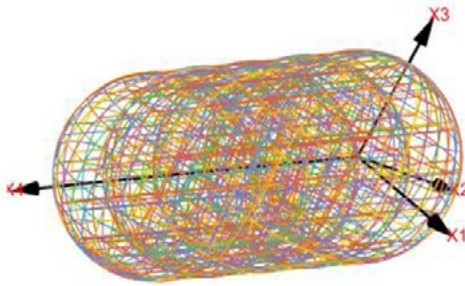
```
g3 = Show[ParametricPlot3D[cpu3 // Evaluate, {u3, 0, 2},
  PlotStyle -> Thickness[0.0001], Boxed -> False, Axes -> False],
  Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 15. Rayos paralelos al plano de giro que habitan en un hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Figura 16. El esqueleto del hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Algunas familias de curvas especiales en el Hipercilindro 4D

1. Familia de curvas de Viviani

Para obtener estas curvas debemos hacer $R = 1$, $u_1 = u_2 = t$ y $u_3 = k$, $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación

HipeCili4D[{t, t, k}, 1]

$$\{-\cos[t] \sin[t], \cos[t]^2, \sin[t], k\}$$

Para graficar esta familia de curvas de Viviani tenemos que usar la inmersión dada en la sección 2.2.3

hipeCili4D[{t, t, v}, 1]

$$\left\{-\frac{v}{\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{v}{\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{v}{\sqrt{3}} + \sin[t]\right\}$$

Se genera la siguiente lista

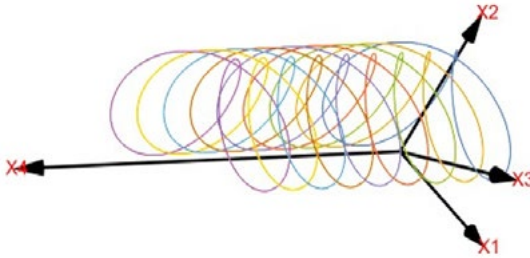
lis1 = Table[hipeCili4D[{t, t, v}, 1], {v, 0, 2, 1/4}]

$$\begin{aligned} &\left\{-\cos[t] \sin[t], \cos[t]^2, \sin[t]\right\}, \\ &\left\{-\frac{1}{4\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \sin[t]\right\}_s \\ &\left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \sin[t]\right\}_s \\ &\left\{-\frac{\sqrt{3}}{4} - \cos[t] \sin[t], -\frac{\sqrt{3}}{4} + \cos[t]^2, -\frac{\sqrt{3}}{4} + \sin[t]\right\}, \\ &\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sin[t]\right\}, \\ &\left\{-\frac{5}{4\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{5}{4\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{5}{4\sqrt{3}} + \sin[t]\right\}_s \\ &\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos[t] \sin[t], -\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos[t]^2, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin[t]\right\}, \\ &\left\{-\frac{7}{4\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{7}{4\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{7}{4\sqrt{3}} + \sin[t]\right\}_s \\ &\left\{-\frac{2}{\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos[t]^2, -\frac{2}{\sqrt{3}} + \sin[t]\right\} \end{aligned}$$

Luego lo graficamos

**Show[ParametricPlot3D[lis1 // Evaluate, {t, 0, 2 Pi},
PlotStyle → Thickness[0.0001], Boxed → False, Axes → False],
Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange → All]**

Figura 17. Familia de curvas de Viviani en el hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Familia de curvas de espirales esféricas

Para obtener estas curvas debemos de hacer $u_1 = 20t$, $u_2 = t$ y $u_3 = k$, $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación

HipeCili4D[{**t**, **20 t**, **1**}, **u3**]

{ $-u_3 \cos[t] \sin[20t]$, $u_3 \cos[t] \cos[20t]$, $u_3 \sin[t]$, 1}

Con la inmersión se tiene

hipeCili4D[{**t**, **20 t**, **1**}, **u3**]

$\left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} - u_3 \cos[t] \sin[20t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[t] \cos[20t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + u_3 \sin[t] \right\}$

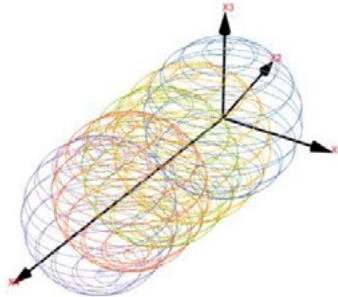
Luego tenemos la siguiente lista

lis2 = Table[hipeCili4D[{t, 20 t, v}, 1], {v, 0, 2, 1/2}]

$$\left\{ \left\{ -\cos[t] \sin[20t], \cos[t] \cos[20t], \sin[t] \right\}, \right. \\ \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[20t], -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \cos[t] \cos[20t], -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \sin[t] \right\}, \\ \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[20t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos[t] \cos[20t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sin[t] \right\}, \\ \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos[t] \sin[20t], -\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos[t] \cos[20t], -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin[t] \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[20t], -\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos[t] \cos[20t], -\frac{2}{\sqrt{3}} + \sin[t] \right\} \right\}$$

**Show[ParametricPlot3D[lis2 // Evaluate, {t, 0, 2 Pi},
PlotStyle → Thickness[0.0001], Boxed → False, Axes → False],
Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange → All]**

Figura 18. Familia de espirales esférica en un hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Familia de curvas cerradas en superficies Esféricas

Aparte que intrínsecamente hay circunferencias las cuales son curvas cerradas también se pueden encontrar otro tipo tal como lo mencionamos a continuación.

Para obtener estas curvas debemos de hacer $u_1 = \arccos t$, $u_2 = \arcsin t$ y $u_3 = k$, $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación del hipercilindro.

HipeCili4D[{ArcCos[t], ArcCos[t], v}, 1]

$$\left\{-t \sqrt{1-t^2}, t^2, \sqrt{1-t^2}, v\right\}$$

Aplicando la inmersión

hipeCili4D[{ArcCos[t], ArcCos[t], v}, 1]

$$\left\{-t \sqrt{1-t^2} - \frac{v}{\sqrt{3}}, t^2 - \frac{v}{\sqrt{3}}, \sqrt{1-t^2} - \frac{v}{\sqrt{3}}\right\}$$

Generamos una lista

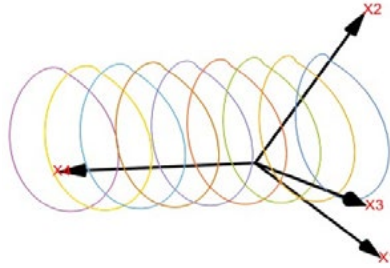
lis3 = Table[hipeCili4D[{ArcCos[t], ArcCos[t], v}, 1], {v, 0, 2, 1/4}]

$$\begin{aligned} & \left\{\left\{-t \sqrt{1-t^2}, t^2, \sqrt{1-t^2}\right\}, \left\{-\frac{1}{4 \sqrt{3}}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{1}{4 \sqrt{3}}+t^2, -\frac{1}{4 \sqrt{3}}+\sqrt{1-t^2}\right\},\right. \\ & \left\{-\frac{1}{2 \sqrt{3}}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{1}{2 \sqrt{3}}+t^2, -\frac{1}{2 \sqrt{3}}+\sqrt{1-t^2}\right\}, \\ & \left\{-\frac{\sqrt{3}}{4}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}+t^2, -\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{1-t^2}\right\}, \\ & \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}+t^2, -\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1-t^2}\right\}, \\ & \left\{-\frac{5}{4 \sqrt{3}}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{5}{4 \sqrt{3}}+t^2, -\frac{5}{4 \sqrt{3}}+\sqrt{1-t^2}\right\}, \\ & \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+t^2, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{1-t^2}\right\}, \\ & \left\{-\frac{7}{4 \sqrt{3}}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{7}{4 \sqrt{3}}+t^2, -\frac{7}{4 \sqrt{3}}+\sqrt{1-t^2}\right\}, \\ & \left.\left\{-\frac{2}{\sqrt{3}}-t \sqrt{1-t^2}, -\frac{2}{\sqrt{3}}+t^2, -\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{1-t^2}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Luego lo graficamos

**Show[ParametricPlot3D[lis3 // Evaluate, {t, -1, 1},
PlotStyle → Thickness[0.0001], Boxed → False, Axes → False],
Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 1.5}], PlotRange → All]**

Figura 19. Familia de curvas de cerradas en el hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Superficies básicas en el Hipercilindro 4D

1. Primeramente, consideramos las superficies que dependen de $u_1 u_2$

HipeCili4D[{**u1**, **u2**, **u3**}, 1]

{-Cos[u1] Sin[u2], Cos[u1] Cos[u2], Sin[u1], u3}

Luego con la inmersión

hipeCili4D[{**u1**, **u2**, **u3**}, 1]

$\left\{ -\frac{u_3}{\sqrt{3}} - \text{Cos}[u_1] \text{Sin}[u_2], -\frac{u_3}{\sqrt{3}} + \text{Cos}[u_1] \text{Cos}[u_2], -\frac{u_3}{\sqrt{3}} + \text{Sin}[u_1] \right\}$

Luego se genera la lista, en donde se le da valores reales con incrementos iguales al parámetro u_3

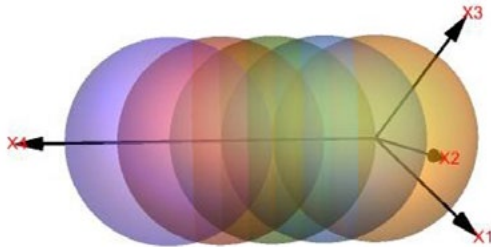
```
tsu12 = Table[hipeCili4D[{u1, u2, u3}, 1], {u3, 0, 2, 1/2}]
```

$$\left\{ \begin{aligned} & \{-\cos[u_1] \sin[u_2], \cos[u_1] \cos[u_2], \sin[u_1]\}, \\ & \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \cos[u_1] \sin[u_2], -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \cos[u_1] \cos[u_2], -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \sin[u_1] \right\}, \\ & \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos[u_1] \sin[u_2], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos[u_1] \cos[u_2], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sin[u_1] \right\}, \\ & \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos[u_1] \sin[u_2], -\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos[u_1] \cos[u_2], -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin[u_1] \right\}, \\ & \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}} - \cos[u_1] \sin[u_2], -\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos[u_1] \cos[u_2], -\frac{2}{\sqrt{3}} + \sin[u_1] \right\} \end{aligned} \right\}$$

Luego lo graficamos

```
Show[ParametricPlot3D[tsu12 // Evaluate, {u1, 0, 2 Pi}, {u2, -Pi/2, Pi/2},
  PlotStyle -> Opacity[0.4], Mesh -> False, PlotPoints -> {40, 35},
  Boxed -> False, Axes -> False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 20. Familia de superficies esféricas en el hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Teorema 3

La familia de esferas básicas en el Hipercilindro 4D

$$\text{HipeCili4D}[\{u_1, u_2, k\}, R]$$

Tienen sus centros en el eje x_4 , además el radio de cada esfera es de radio R

Demostración.

La ecuación es

$$\text{HipeCili4D}[\{u1, u2, K\}, R] = \{-R \cos[u2] \sin[u1], R \cos[u1] \cos[u2], R \sin[u2], k\}$$

lo evaluamos en $\{u1, u2\} = \{0, \pi/2\}$ y $\{u1, u2\} = \{0, -\pi/2\}$

$$\text{HipeCili4D}[\{0, \pi/2, k\}, R] = \{0, 0, R, k\}$$

$$\text{HipeCili4D}[\{0, -\pi/2, k\}, R] = \{0, 0, -R, k\}$$

de modo que el centro es

$$\text{Cen} = \frac{\text{HipeCili4D}[\{0, \pi/2, k\}, R] + \text{HipeCili4D}[\{0, -\pi/2, k\}, R]}{2} = \{0, 0, 0, k\}$$

además, dado que:

$$\text{HipeCili4D}[\{0, \pi/2, k\}, R] - \text{Cen} = \{0, 0, R, 0\}$$

entonces el radio de las esferas es R.

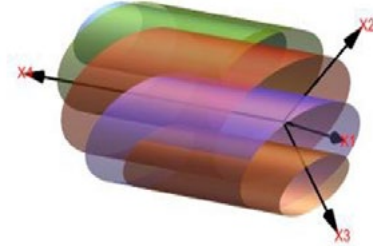
2. En segundo lugar, consideramos las superficies que dependen de u_1, u_3

Generamos la siguiente lista

$$\left\{ \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}}, -\frac{u3}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{\sin[u1]}{2}, -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{\cos[u1]}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \right. \\ \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin[u1], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u1], -\frac{1}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \sin[u1], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \cos[u1], -\frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin[u1], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u1], \frac{1}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{\sin[u1]}{2}, -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{\cos[u1]}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}}, -\frac{u3}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

```
Show[ParametricPlot3D[tsu13 // Evaluate, {u1, 0, 2 Pi}, {u3, 0, 2},
  PlotStyle -> Opacity[0.6], Mesh -> False, PlotPoints -> {40, 35},
  Boxed -> False, Axes -> False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 21. Familia de superficies cilíndricas en el hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Teorema 4

La familia de cilindros básicos en el Hipercilindro 4D, $\text{HipeCili4D}[\{u1, k, u3\}, R]$. Tienen como centro $\{0,0, R, \text{Sin}[k], 0\}$ y el eje de giro es $l[t] = \{0,0, \text{Sin}[k], 0\} + t\{0,0,0, k\}$ además el radio es $r = R\text{Cos}[k]$

Demostración.

El hipercilindro 4D

$\text{HipeCili4D}[\{u1, k, u3\}, R] = \{-R\text{Cos}[k]\text{Sin}[u1], R\text{Cos}[k]\text{Cos}[u1], R\text{Sin}[k], u3\}$

consideremos $u3 = 0$ y calculemos los extremos

$$\text{ext1} = \text{HipeCili4D}[\{0, k, 0\}, R] = \{0, R\text{Cos}[k], R\text{Sin}[k], 0\}$$

$$\text{ext2} = \text{HipeCili4D}[\{Pi, k, 0\}, R] = \{0, -R\text{Cos}[k], R\text{Sin}[k], 0\}$$

entonces el centro es

$$\text{cen} = \frac{\text{ext1} + \text{ext2}}{2} = \{0, 0, R\text{Sin}[k], 0\}$$

es el centro de cada cilindro y como estos, están dentro del Hipercilindro 4D y el plano de giro del paraboloide 3D contienen al

eje x_4 y como lo sugiere la figura 21, este es la dirección de la recta que pasa por el cen cuya ecuación es:

$$l[t] = \{0, 0, \sin[k], 0\} + t\{0, 0, 0, k\}$$

Para calcular el radio

$$\sqrt{[(\text{cen} - \text{ext}_2) \cdot (\text{cen} - \text{ext}_2)]} = R \cos[k]$$

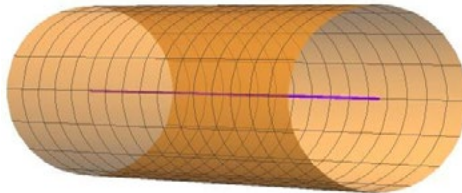
Si $k = 1$, graficamos el cilindro y el eje del cilindro con

```
cili = ParametricPlot3D[hipeCili4D[{u1, 1, u3}, 1], {u1, 0, 2 Pi}, {u3, 0, 2}];
PlotStyle -> Opacity[0.6]

rec = ParametricPlot3D[phi[{0, 0, Sin[1], 0} + t {0, 0, 0, 1}], {t, 0, 2}];
PlotStyle -> Hue[0.75]]

Show[rec, cili, PlotRange -> All]
```

Figura 22, Una superficie cilíndrica con su eje de giro.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

En tercer lugar, consideramos las superficies que dependen de $u_2 u_3$

Generamos la siguiente lista

```
tsu23 = Table[hipeCili4D[{u1, u2, u3}, 1], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 6}]
```

$$\left\{ \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \cos[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \right.$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u2], \frac{1}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{\sin[u2]}{2}, -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{\cos[u2]}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}}, -\frac{u3}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{\sin[u2]}{2}, -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{\cos[u2]}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u2], \frac{1}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \cos[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u2], -\frac{1}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{\sin[u2]}{2}, -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{\cos[u2]}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

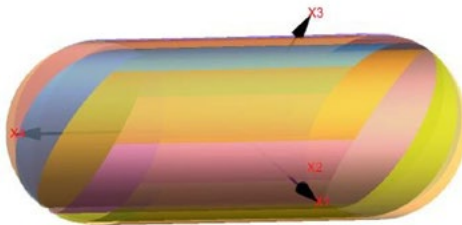
$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}}, \frac{u3}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{\sin[u2]}{2}, -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{\cos[u2]}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos[u2], -\frac{1}{2} - \frac{u3}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{u3}{\sqrt{3}} - \sin[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} + \cos[u2], -\frac{u3}{\sqrt{3}} \right\} \}$$

```
Show[ParametricPlot3D[tsu23 // Evaluate, {u2, -Pi / 2, Pi / 2}, {u3, -Pi / 2, Pi / 2},
  PlotStyle -> Opacity[0.6], Mesh -> False, PlotPoints -> {40, 35}, Boxed -> False,
  Axes -> False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 2.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 23. Otra familia de superficies cilíndricas en el hipercilindro 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

El Hiperparaboloide en 4D

Teorema 5

La ecuación de un Hiperparaboloide en la cuarta dimensión en forma paramétrica viene dada por $Hparaboloide4D[\{u1, u2, u3\}] = \{u3 \sin[u1] \sin[u2], -u3 \cos[u2] \sin[u1], u3 \cos[u1], u3^2\}$ y en cartesianas

$$x_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Demostración.

Para obtener la ecuación del paraboloide tridimensional se hace rotar una parábola con respecto al eje x_3 y luego al paraboloide tridimensional obtenido se hace rotar respecto al plano generado por los vectores $\{0,0,1,0\}$ y $\{0,0,0,1\}$, esto lo presentamos con el software Mathematica.

```
HParaboloide4D[{u1_, u2_, u3_}] :=  
  Rotx3x4[u2].(Prepend[Rotx3[u1].{0, u3, u3^2}, 0])
```

```
HParaboloide4D[{u1, u2, u3}]
```

```
{u3 Sin[u1] Sin[u2], -u3 Cos[u2] Sin[u1], u3 Cos[u1], u3^2}
```

Ahora dado que

```
HParaboloide4D[{u1, u2, u3}][[1]]^2 + HParaboloide4D[{u1, u2, u3}][[2]]^2 +  
  HParaboloide4D[{u1, u2, u3}][[3]]^2 == HParaboloide4D[{u1, u2, u3}][[4]] //  
  Simplify  
True
```

Entonces significa que en coordenadas cartesianas se cumple

$$x_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

El cuál es la ecuación de un Hiperparaboloide en la cuarta dimensión.

A continuación, le vamos a aplicar la inmersión, para graficarla y tener una observación de las curvas paramétricas básicas u^i , $i = 1, 2, 3$. Y también de las superficies básicas inmersas $u_i u_j$, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$.

Definimos

```
hParaboloide4D[{u1_, u2_, u3_}] :=  $\phi$ [HParaboloide4D[{u1, u2, u3}]]
```

Lo ejecutamos

```
hParaboloide4D[{u1, u2, u3}]
```

$$\left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \sin[u_1] \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos[u_2] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}$$

Y esta ecuación lo hemos bajado al espacio tridimensional.

Curvas paramétricas en el Hiperparaboloide en 4D

1. Las curvas paramétricas u_1

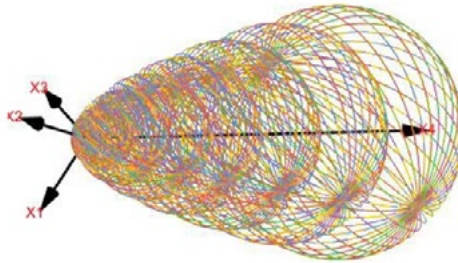
Generamos una lista donde permanece solamente el parámetro u_1

```
cpu11 =
Union[
Partition[
Flatten[Table[Table[hParaboloide4D[{u1, u2, u3}], {u2, 0, 2 Pi, Pi / 10}],
{u3, 0, 2, 1 / 4}]], 3]];
```

Y lo graficamos con

```
g11 = Show[ParametricPlot3D[cpu11 // Evaluate, {u1, 0, 2 Pi},
  PlotStyle → Thickness[0.0001], Boxed → False, Axes → False],
  Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 5.5}], PlotRange → All]
```

Figura 24. Meridianos en familias de esferas dentro de un Hiperparaboloide 4D



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

2. Las curvas paramétricas u_2

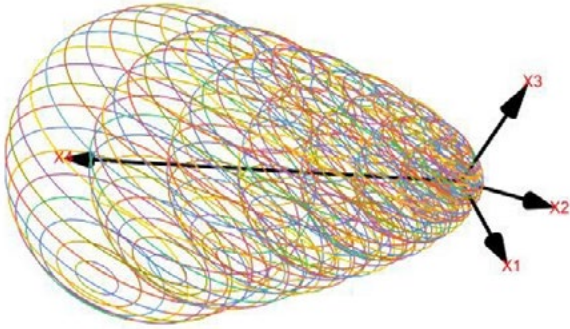
Generamos una lista donde permanece solamente el parámetro u_2

```
cpu22 =
  Partition[
    Flatten[Table[Table[hParaboloide4D[{u1, u2, u3}], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 20}],
      {u3, 0, 2, 1 / 4}], 3];
```

Y lo graficamos mediante

```
g22 = ParametricPlot3D[cpu22 // Evaluate, {u2, -Pi / 2, Pi / 2},
  PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

Figura 25. Paralelos en familias de esferas que habitan en un Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

3. Las curvas paramétricas u_3

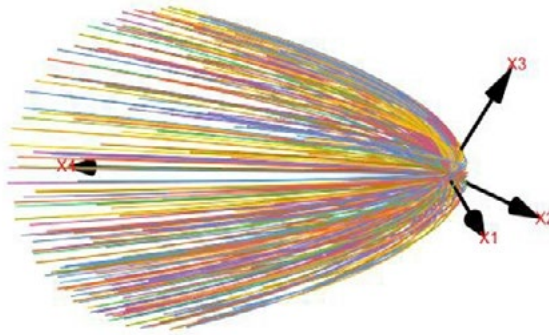
Generamos una lista donde permanece solamente el parámetro u_3

```
cpu33 =
Partition[
  Flatten[Table[Table[hParaboloide4D[{u1, u2, u3}], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 12}],
    {u2, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 12}], 3];
```

Las gráficas de estas curvas se logran mediante

```
g33 = ParametricPlot3D[cpu33 // Evaluate, {u3, 0, 2},
  PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

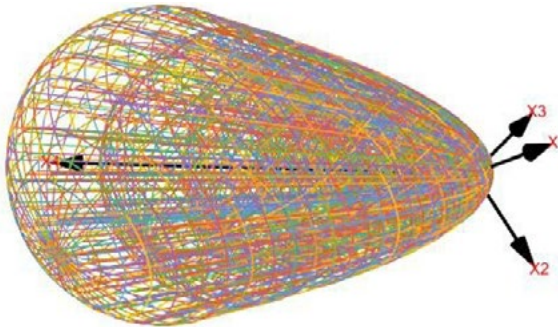
Figura 26. Familia de parábolas que habitan en un Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Uniendo las gráficas de las figuras 20, 21 y 22 se tiene el esqueleto del Hipercilindro 4D.

Figura 27. El esqueleto del Hiperparaboloide en la cuarta dimensión.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Algunas familias de curvas especiales en el Hiperparaboloide en 4D

1. Familia de curvas de Viviani en un Hiperparaboloide 4D.

Para obtener estas curvas debemos hacer $1, u_1 = u_2 = t$ y $u_3 = k, k \in R$ en la ecuación

HParaboloide4D[{t, t, u3}]

$$\{u_3 \sin[t]^2, -u_3 \cos[t] \sin[t], u_3 \cos[t], u_3^2\}$$

Para graficar esta familia de curvas de Viviani tenemos que usar la inmersión dada en la sección 2.2.3

hParaboloide4D[{t, t, u3}]

$$\left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \sin[t]^2, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos[t] \sin[t], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[t] \right\}$$

Se genera la siguiente lista

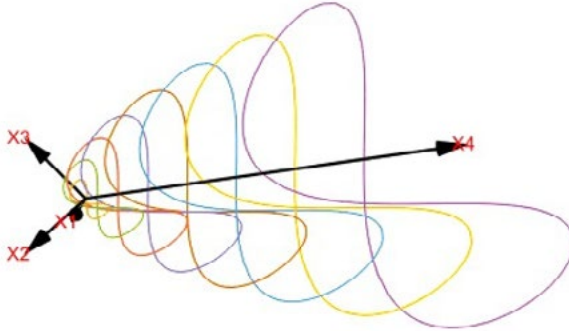
ta1 = Table[hParaboloide4D[{t, t, u3}], {u3, 0, 2, 1/4}]

$$\begin{aligned} & \left\{ \{0, 0, 0\}, \left\{ -\frac{1}{16\sqrt{3}} + \frac{\sin[t]^2}{4}, -\frac{1}{16\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \cos[t] \sin[t], -\frac{1}{16\sqrt{3}} + \frac{\cos[t]}{4} \right\}, \right. \\ & \left\{ -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\sin[t]^2}{2}, -\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cos[t] \sin[t], -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\cos[t]}{2} \right\}, \\ & \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sin[t]^2}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3}{4} \cos[t] \sin[t], -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3\cos[t]}{4} \right\}, \\ & \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sin[t]^2, -\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos[t] \sin[t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos[t] \right\}, \\ & \left\{ -\frac{25}{16\sqrt{3}} + \frac{5\sin[t]^2}{4}, -\frac{25}{16\sqrt{3}} - \frac{5}{4} \cos[t] \sin[t], -\frac{25}{16\sqrt{3}} + \frac{5\cos[t]}{4} \right\}, \\ & \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sin[t]^2}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \cos[t] \sin[t], -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cos[t]}{2} \right\}, \\ & \left\{ -\frac{49}{16\sqrt{3}} + \frac{7\sin[t]^2}{4}, -\frac{49}{16\sqrt{3}} - \frac{7}{4} \cos[t] \sin[t], -\frac{49}{16\sqrt{3}} + \frac{7\cos[t]}{4} \right\}, \\ & \left. \left\{ -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sin[t]^2, -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\cos[t] \sin[t], -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\cos[t] \right\} \right\} \end{aligned}$$

Luego lo graficamos

```
Show[ParametricPlot3D[ta1 // Evaluate, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thickness[0.001],
  Boxed -> False, Axes -> False], Axes4D[{1, 1, 1, 4.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 28. Familia de curvas de Viviani en un Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

2. Familia de curvas de Espirales esféricas.

Para obtener estas curvas debemos de hacer $u_1 = t$, $u_2 = 30t$ y $u_3 = k$, $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación

HParaboloide4D[{t, 30 t, u3}]

$\{u_3 \sin[t] \sin[30t], -u_3 \cos[30t] \sin[t], u_3 \cos[t], u_3^2\}$

Con la inmersión se tiene

hParaboloide4D[{t, 30 t, u3}]

$\left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \sin[t] \sin[30t], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos[30t] \sin[t], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[t] \right\}$

Luego tenemos la siguiente lista

```
ta2 = Table[hParaboloide4D[{t, 30 t, u3}], {u3, 0, 2, 1/4}]
```

$$\left\{ \{0, 0, 0\}, \right.$$

$$\left\{ -\frac{1}{16\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \sin[t] \sin[30t], -\frac{1}{16\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \cos[30t] \sin[t], -\frac{1}{16\sqrt{3}} + \frac{\cos[t]}{4} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sin[t] \sin[30t], -\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cos[30t] \sin[t], -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\cos[t]}{2} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{4} \sin[t] \sin[30t], -\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3}{4} \cos[30t] \sin[t], -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3\cos[t]}{4} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sin[t] \sin[30t], -\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos[30t] \sin[t], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos[t] \right\},$$

$$\left\{ -\frac{25}{16\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \sin[t] \sin[30t], -\frac{25}{16\sqrt{3}} - \frac{5}{4} \cos[30t] \sin[t], -\frac{25}{16\sqrt{3}} + \frac{5\cos[t]}{4} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \sin[t] \sin[30t], -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \cos[30t] \sin[t], -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cos[t]}{2} \right\},$$

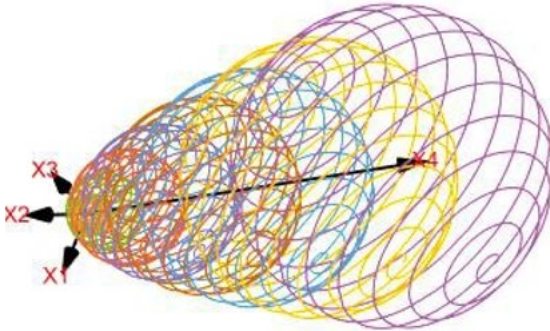
$$\left\{ -\frac{49}{16\sqrt{3}} + \frac{7}{4} \sin[t] \sin[30t], -\frac{49}{16\sqrt{3}} - \frac{7}{4} \cos[30t] \sin[t], -\frac{49}{16\sqrt{3}} + \frac{7\cos[t]}{4} \right\},$$

$$\left\{ -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \sin[t] \sin[30t], -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2 \cos[30t] \sin[t], -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \cos[t] \right\} \}$$

Luego se obtiene el siguiente grafico

```
Show[ParametricPlot3D[ta2 // Evaluate, {t, 0, Pi}, PlotStyle -> Thickness[0.001],  
Boxed -> False, Axes -> False], Axes4D[{1, 1, 1, 4.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 29. Familia de espirales esférica en un Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

3. Familia de curvas abiertas en superficies Esféricas dentro de un Hiperparaboloide 4D.

Aparte que intrínsecamente hay circunferencias las cuales son curvas cerradas, también se pueden encontrar otro tipo, tal como lo mencionamos a continuación.

Para obtener estas curvas debemos de hacer $u_1 = \arccos t$, $u_2 = \arcsin t$ y $u_3 = k$, $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación del hipercilindro.

HParaboloide4D[{ArcCos[t], ArcSin[t], k}]

$$\{k t \sqrt{1-t^2}, -k(1-t^2), k t, k^2\}$$

Aplicando la inmersión

hParaboloide4D[{ArcCos[2 t], ArcSin[t], k}]

$$\left\{-\frac{k^2}{\sqrt{3}} + k t \sqrt{1-4t^2}, -\frac{k^2}{\sqrt{3}} - k \sqrt{1-4t^2} \sqrt{1-t^2}, -\frac{k^2}{\sqrt{3}} + 2 k t\right\}$$

Generamos una lista

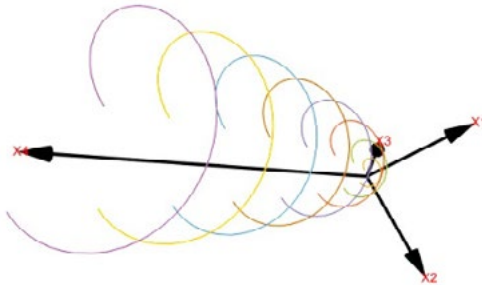
ta3 = Table[hParaboloide4D[{ArcCos[t], ArcSin[t], k}], {k, 0, 2, 1/4}] //
FullSimplify

$$\begin{aligned} &\left\{\{0, 0, 0\}, \left\{\frac{1}{48}(-\sqrt{3} + 12 t \sqrt{1-t^2}), \frac{1}{48}(-12 - \sqrt{3} + 12 t^2), \frac{1}{48}(-\sqrt{3} + 12 t)\right\}, \right. \\ &\left\{\frac{1}{12}(-\sqrt{3} + 6 t \sqrt{1-t^2}), \frac{1}{12}(-6 - \sqrt{3} + 6 t^2), \frac{1}{12}(-\sqrt{3} + 6 t)\right\}, \\ &\left\{-\frac{3}{16}(\sqrt{3} - 4 t \sqrt{1-t^2}), -\frac{3}{16}(4 + \sqrt{3} - 4 t^2), -\frac{3}{16}(\sqrt{3} - 4 t)\right\}, \\ &\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}} + t \sqrt{1-t^2}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + t^2, -\frac{1}{\sqrt{3}} + t\right\}, \\ &\left\{\frac{5}{48}(-5 \sqrt{3} + 12 t \sqrt{1-t^2}), -\frac{5}{48}(12 + 5 \sqrt{3} - 12 t^2), \frac{5}{48}(-5 \sqrt{3} + 12 t)\right\}, \\ &\left\{-\frac{3}{4}(\sqrt{3} - 2 t \sqrt{1-t^2}), -\frac{3}{4}(2 + \sqrt{3} - 2 t^2), -\frac{3}{4}(\sqrt{3} - 2 t)\right\}, \\ &\left\{\frac{7}{48}(-7 \sqrt{3} + 12 t \sqrt{1-t^2}), -\frac{7}{48}(12 + 7 \sqrt{3} - 12 t^2), \frac{7}{48}(-7 \sqrt{3} + 12 t)\right\}, \\ &\left.\left\{-\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 t \sqrt{1-t^2}, -2 - \frac{4}{\sqrt{3}} + 2 t^2, -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 t\right\}\right\} \end{aligned}$$

Luego lo graficamos

```
Show[ParametricPlot3D[lis3 // Evaluate, {t, -1, 1}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> Thickness[0.001]], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 2.5}]]
```

Figura 30. Familia de curvas abiertas en el Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

• Superficies básicas en el Hiperparaboloide en 4D

Estas superficies básicas se generan tomando los parámetros de a dos

1. Superficies que dependen de $u_1 u_2$

HParaboloide4D[{u1, u2, k}]

$\{k \sin[u1] \sin[u2], -k \cos[u2] \sin[u1], k \cos[u1], k^2\}$

Luego con la inmersión

hParaboloide4D[{u1, u2, k}]

$\left\{-\frac{k^2}{\sqrt{3}} + k \sin[u1] \sin[u2], -\frac{k^2}{\sqrt{3}} - k \cos[u2] \sin[u1], -\frac{k^2}{\sqrt{3}} + k \cos[u1]\right\}$

Luego se genera la lista, en donde se le da valores reales con incrementos iguales al parámetro u_3

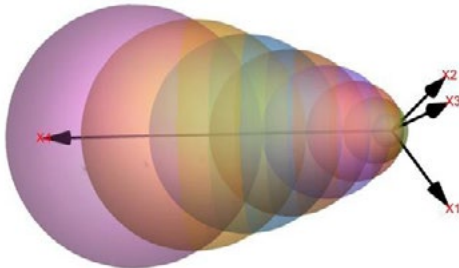
tsu12 = Table[hParaboloide4D[{u1, u2, u3}], {u3, 0, 2, 1/4}]

$$\left\{ \{0, 0, 0\}, \left\{ -\frac{1}{16\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \sin[u1] \sin[u2], -\frac{1}{16\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \cos[u2] \sin[u1], -\frac{1}{16\sqrt{3}} + \frac{\cos[u1]}{4} \right\}, \right. \\ \left\{ -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sin[u1] \sin[u2], -\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cos[u2] \sin[u1], -\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\cos[u1]}{2} \right\}, \\ \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{4} \sin[u1] \sin[u2], -\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3}{4} \cos[u2] \sin[u1], -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3\cos[u1]}{4} \right\}, \\ \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sin[u1] \sin[u2], -\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos[u2] \sin[u1], -\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos[u1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{25}{16\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \sin[u1] \sin[u2], -\frac{25}{16\sqrt{3}} - \frac{5}{4} \cos[u2] \sin[u1], -\frac{25}{16\sqrt{3}} + \frac{5\cos[u1]}{4} \right\}, \\ \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \sin[u1] \sin[u2], -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \cos[u2] \sin[u1], -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cos[u1]}{2} \right\}, \\ \left\{ -\frac{49}{16\sqrt{3}} + \frac{7}{4} \sin[u1] \sin[u2], -\frac{49}{16\sqrt{3}} - \frac{7}{4} \cos[u2] \sin[u1], -\frac{49}{16\sqrt{3}} + \frac{7\cos[u1]}{4} \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \sin[u1] \sin[u2], -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2 \cos[u2] \sin[u1], -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \cos[u1] \right\} \right\}$$

Luego lo graficamos

**Show[ParametricPlot3D[tsu12 // Evaluate, {u1, 0, 2 Pi}, {u2, -Pi/2, Pi/2},
PlotStyle → Opacity[0.4], Mesh → False, PlotPoints → {40, 35},
Boxed → False, Axes → False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange → All]**

Figura 31. Familia de esferas en el Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Teorema 6

En la familia de esferas básicas del Hiperparaboloide 4D

$HParaboloide4D[\{u1, u2, k\}] = \{k \sin[u1] \sin[u2], -k \cos[u2] \sin[u1], k \cos[u1], k_2\}$ tienen sus centros en el eje x4, además el radio de la esfera es $r = k$

Demostración.

El polo norte de las esferas en general es

$$polN = HParaboloide4D[\{Pi/2, 0, k\}] = \{0, -k, 0, k^2\}$$

El polo sur de las esferas

$$polS = HParaboloide4D[\{-Pi/2, 0, k\}] = \{0, k, 0, k^2\}$$

luego el centro es

$$cen = \frac{polN + polS}{2} = \{0, 0, 0, k^2\}$$

todos los centros están ubicados en el eje x4 además, el radio lo obtenemos con

$$\text{Sqrt}[(cen - polN) \cdot (cen - polN)] = k$$

Teorema 7

En la familia de esferas básicas del Hiperparaboloide 4D

$HParaboloide4D[\{u1, u2, k\}] = \{k \sin[u1] \sin[u2], -k \cos[u2] \sin[u1], k \cos[u1], k_2\}$

los polos de todas las esferas están en una parábola.

Demostración.

los polos norte son

$$pn = \left\{ \{0,0,0,0\}, \left\{0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}\right\}, \left\{0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right\}, \left\{0, -\frac{3}{4}, 0, \frac{9}{16}\right\}, \{0, -1, 0, 1\}, \left\{0, -\frac{5}{4}, 0, \frac{25}{16}\right\}, \right. \\ \left. \left\{0, -\frac{3}{2}, 0, \frac{9}{4}\right\}, \left\{0, -\frac{7}{4}, 0, \frac{49}{16}\right\}, \{0, -2, 0, 4\} \right\}$$

los polos sur

$$ps = \left\{ \{0,0,0,0\}, \left\{0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}\right\}, \left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right\}, \left\{0, \frac{3}{4}, 0, \frac{9}{16}\right\}, \{0, 1, 0, 1\}, \left\{0, \frac{5}{4}, 0, \frac{25}{16}\right\}, \right. \\ \left. \left\{0, \frac{3}{2}, 0, \frac{9}{4}\right\}, \left\{0, \frac{7}{4}, 0, \frac{49}{16}\right\}, \{0, 2, 0, 4\} \right\}$$

entonces la parábola que genera estos puntos es

$$\text{Parabola}[t] = \{0, t, 0, t^2\}$$

los puntos se generan cuando $t \in [-2, 2]$, con incrementos de $\frac{1}{2}$.

también le aplicamos el programa de la sección 1.6.4

PunCopl**a** [**pn**]

Los puntos son coplanares

PunCopl**a** [**ps**]

Los puntos son coplanares

PunCopl**a** [**Union** [**Partition** [**Flatten** [**{pn, ps}**], 4]]]

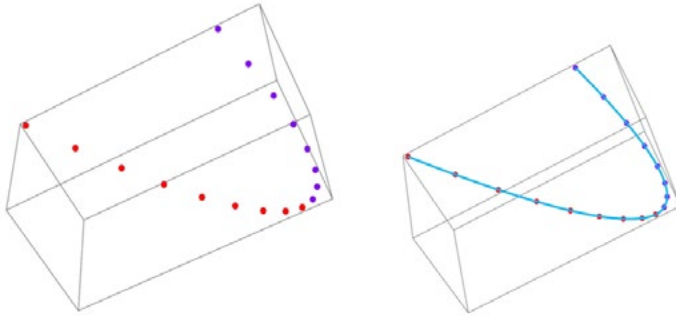
Los puntos son coplanares

la cuestión geometría lo obtenemos mediante

```
gPoint = Graphics3D[{Hue[0], PointSize[0.02], Point /@ φ /@ pn, Hue[0.75],
    Point /@ φ /@ ps}]
```

```
gparab = ParametricPlot3D[φ[{0, t, 0, t^2}], {t, -2, 2}, PlotStyle -> Hue[0.55]]
```

Figura 32. Familia de esferas en el Hiperparaboloide 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

2. Superficies que dependen de $u_1 u_3$

Generamos la siguiente lista

En este caso el parámetro que toma valores es u_2

```
tSu13 = Table[hParaboloide4D[{u1, u2, u3}], {u2, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8}]
```

$$\left\{ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \right. \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \sin\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{u_3 \sin[u_1]}{\sqrt{2}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{u_3 \sin[u_1]}{\sqrt{2}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \sin\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \sin\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{u_3 \sin[u_1]}{\sqrt{2}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{u_3 \sin[u_1]}{\sqrt{2}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \sin\left[\frac{\pi}{8}\right] \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \sin[u_1], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_1] \right\} \right\}$$

```
Show[ParametricPlot3D[tSu13 // Evaluate, {u1, 0, 2 Pi}, {u3, 0, 2},
  PlotStyle -> Opacity[0.6], Mesh -> False, PlotPoints -> {40, 35}, Boxed -> False,
  Axes -> False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 5.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 33. Familia de paraboloides 3D en el Hiperparaboloides 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

3. Superficies que dependen de $u_2 u_3$

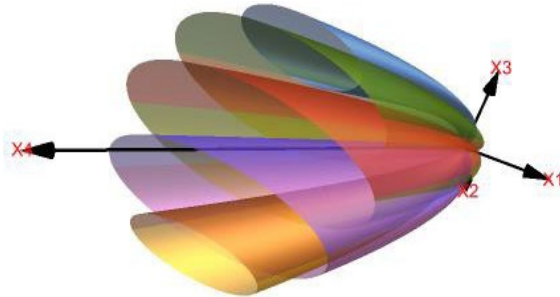
En este caso el parámetro que toma valores es u_1

```
tSu23 = Table[hParaboloides4D[{u1, u2, u3}], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 6}]
```

$$\left\{ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, u_3 - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} u_3 \cos[u_2], \frac{\sqrt{3} u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \right. \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \cos[u_2], \frac{u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \cos[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \cos[u_2], -\frac{u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} u_3 \cos[u_2], -\frac{\sqrt{3} u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -u_3 - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} u_3 \cos[u_2], -\frac{\sqrt{3} u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \cos[u_2], -\frac{u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + u_3 \cos[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} u_3 \cos[u_2], \frac{u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} u_3 \sin[u_2], -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} u_3 \cos[u_2], \frac{\sqrt{3} u_3}{2} - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, -\frac{u_3^2}{\sqrt{3}}, u_3 - \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

```
Show[ParametricPlot3D[tSu23 // Evaluate, {u2, -Pi / 2, Pi / 2}, {u3, 0, 2},
  PlotStyle -> Opacity[0.6], Mesh -> False, PlotPoints -> {40, 35}, Boxed -> False,
  Axes -> False], Axes4D[{1.5, 1.5, 1.5, 3.5}], PlotRange -> All]
```

Figura 34. Otra familia de paraboloides 3D en el Hiperparaboloido 4D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Conceptos fundamentales y reflexiones finales sobre la visualización multidimensional

Para concluir este recorrido, es pertinente definir algunos conceptos básicos que han subyacido a todo el desarrollo. Un parámetro es un valor numérico o dato fijo que se considera en el estudio o análisis de una cuestión; en el contexto de la geometría paramétrica, los parámetros son las variables independientes que permiten recorrer las curvas y superficies. La programación, entendida como el proceso mediante el cual las computadoras reciben instrucciones para desempeñar una tarea específica, es la herramienta que hace posible la implementación de los algoritmos de visualización. La simulación, por su parte, es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital, comprendiendo ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas necesarias para describir el com-

portamiento y la estructura de sistemas complejos (Goldsmith & Mann, 1976). En este sentido, la simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias (Shannon & Johannes, 1976). La hipersuperficie es una variedad n -dimensional con $n > 2$, que generaliza la noción de superficie bidimensional, del mismo modo que el hiperplano generaliza la noción de plano. La inmersión, definida como una aplicación diferenciable entre variedades cuya diferencial es inyectiva en todo punto (Velezmoro & Ipanaqué, 2015), es el concepto matemático que formaliza la proyección de objetos de alta dimensión en espacios de menor dimensión. Los puntos coplanares son aquellos que pertenecen a un mismo plano; cabe recordar que 2 o 3 puntos cualesquiera siempre son coplanares, pero al tener 4 o más puntos, puede que no lo sean. Finalmente, los puntos alineados son aquellos que se encuentran sobre una misma recta.

En síntesis, el desarrollo de modelos de visualización para espacios de dimensión superior, apoyados en herramientas computacionales como Mathematica, no solo enriquece nuestra comprensión de la geometría abstracta, sino que también proporciona un puente entre el rigor analítico y la intuición espacial. Las técnicas de inmersión, el análisis de coplanaridad y el estudio de curvas y superficies en objetos como el hipercilindro y el hiperparaboloide constituyen un campo fértil para la investigación futura, con potenciales aplicaciones en física teórica, gráficos por computadora y educación matemática. La posibilidad de diseñar un modelo geométrico 5D para el estudio

de hipersuperficies cilíndricas y paraboloides, y visualizarlos con el software Mathematica, abre nuevas vías para la exploración de estructuras que, aunque distantes de nuestra experiencia sensorial, son fundamentales para la comprensión de las leyes que rigen el universo matemático.

03

Capítulo

*La exploración metodológica de las
hipersuperficies en la quinta dimensión*

El estudio de objetos geométricos inmersos en espacios de dimensionalidad superior requiere una aproximación metodológica cuidadosamente estructurada que integre tanto los fundamentos teóricos como las herramientas computacionales necesarias para su visualización y análisis. La naturaleza misma de los objetos bajo investigación —las hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparaboidales en la quinta dimensión— impone restricciones particulares sobre cómo deben ser abordados, ya que no es posible recurrir a la observación directa o a la experimentación física en el sentido tradicional de las ciencias empíricas. En este contexto, la metodología adoptada se inscribe dentro de un enfoque cuantitativo de carácter esencialmente formal y computacional, donde los objetos de estudio son entidades matemáticas que pueden ser descritas mediante ecuaciones, parametrizaciones y transformaciones geométricas que se exploran sistemáticamente utilizando herramientas de cálculo simbólico y numérico. Este enfoque, ampliamente documentado en la literatura especializada, ha demostrado su eficacia en investigaciones previas sobre visualización multidimensional (Velezmoro, 2019; Anto et al., 2020), donde los autores han utilizado entornos de programación avanzados para trazar hipersuperficies y analizar sus propiedades estructurales. El diseño de la presente investigación es de tipo no experimental, en el sentido de que no se manipulan variables ni se establecen condiciones controladas para observar efectos causales; más bien, se trata de un estudio descriptivo que busca caracterizar de manera exhaustiva las propiedades geométricas de los objetos en cuestión, describiendo sus curvas paramétricas, sus superficies básicas y sus comportamientos bajo diferentes transformaciones. Este nivel descriptivo es apropiado cuando el objetivo principal es la sistematización del conocimiento existente y la generación de nuevas representaciones visuales que faciliten

la comprensión de estructuras matemáticas complejas, tal como lo han hecho investigadores en campos afines (Lone et al., 2016; Escobar, 2023).

La construcción de un modelo geométrico pentadimensional

La investigación aplicada que aquí se describe se distingue por su carácter instrumental, ya que no busca únicamente comprender las hipersuperficies en sí mismas, sino que aspira a desarrollar un modelo geométrico funcional que pueda ser utilizado por otros investigadores, docentes y estudiantes para explorar estos objetos de manera sistemática. Este modelo se fundamenta en el software Mathematica, un entorno de programación que combina capacidades de cálculo simbólico, manipulación numérica y visualización gráfica de alta calidad, lo que lo convierte en una plataforma idónea para la geometría computacional de altas dimensiones. Los sujetos de investigación, en este caso, son las propias hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparaboidales en la quinta dimensión, que constituyen el objeto formal de estudio y que son abordadas como entidades geométricas definidas por ecuaciones paramétricas y cartesianas. Estas hipersuperficies representan una generalización natural de objetos tridimensionales bien conocidos, como el cilindro y el paraboloides, pero extendidos a un espacio de cinco dimensiones, lo que introduce una complejidad adicional tanto en su representación algebraica como en su visualización gráfica. El enfoque aplicado se justifica por la necesidad de disponer de herramientas prácticas que permitan a la comunidad académica acceder a estas representaciones sin requerir un conocimiento profundo de los fundamentos

matemáticos subyacentes, democratizando así el acceso a conceptos avanzados de geometría diferencial y topología.

El procedimiento metodológico seguido en esta investigación se estructuró en varias fases secuenciales, cada una de las cuales contribuyó al logro de los objetivos planteados. En primer lugar, se logró identificar la información necesaria para realizar la investigación sobre el modelo geométrico 5D para el estudio de las hipersuperficies cilíndricas y paraboloides con Mathematica, recurriendo a una amplia gama de fuentes bibliográficas que incluyen apuntes especializados, artículos científicos publicados en revistas indexadas y libros de referencia en el campo de la geometría computacional y la visualización matemática. Esta fase de revisión y recopilación fue fundamental para establecer el estado del arte y para identificar las técnicas y enfoques que habían sido utilizados con éxito en investigaciones previas, evitando así la duplicación de esfuerzos y asegurando que la investigación se asentara sobre bases sólidas. Entre las fuentes consultadas, destacan los trabajos de Velezmoro (2019), sobre visualización de objetos 4D, el paquete 4DPlots desarrollado por Anto et al. (2020), para trazar hipersuperficies implícitamente definidas, y las investigaciones de Lone et al. (2016), sobre curvas de intersección en $\mathbb{R}^5$, todos los cuales proporcionaron orientación metodológica y referentes conceptuales para el desarrollo del presente estudio.

A continuación, se realizó un estudio exhaustivo sobre el modelo para visualizar objetos 3D y 4D mediante inmersiones, lo que implicó un análisis detallado de las técnicas de proyección y los sistemas de coordenadas utilizados para representar objetos de alta dimensión en espacios de menor dimensionalidad. Este estudio incluyó la inferencia de las ecuaciones del cilindro y la parábola en tres dimensiones, así como la extensión de estos

conceptos a los hipercilindros e hiperparaboloides en 4D mediante operaciones de rotación en el espacio tetradimensional. Consecuencia de ello, se lograron estudiar las curvas paramétricas de los objetos mencionados, identificando las familias de curvas que surgen al fijar diferentes parámetros y variando otros, lo que permitió caracterizar la estructura interna de estos objetos desde una perspectiva unidimensional. Además, se estudiaron las superficies básicas de las hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparabólicas, que corresponden a las proyecciones bidimensionales que se obtienen al fijar ciertos parámetros y variar otros dos, proporcionando una comprensión gradual de la estructura global del objeto a partir de sus componentes elementales. Este enfoque reduccionista, que descompone objetos complejos en sus constituyentes de menor dimensión, es una estrategia metodológica ampliamente utilizada en geometría computacional y ha demostrado ser particularmente efectiva para la enseñanza de conceptos abstractos (Facundo, 2023).

Como consecuencia de lo anterior, se logró formular las ecuaciones de la inmersión que permitió hacer el estudio del hipercilindro y el hiperparaboloide en la quinta dimensión, extendiendo las técnicas de proyección desarrolladas para objetos 3D y 4D a un espacio de dimensionalidad aún mayor. Esta extensión no fue trivial, ya que requirió la definición de un sistema de coordenadas adecuado y la determinación de los vectores directores que permitieran proyectar objetos pentadimensionales en el espacio tridimensional de visualización, preservando al máximo las propiedades geométricas relevantes. El modelo de inmersión desarrollado se basa en una generalización de los métodos tetraédricos y cúbicos utilizados en investigaciones previas (Velez-moro & Ipanaque, 2015), pero adaptado a las particularidades de

los objetos hipercilíndricos e hiperparabólicos, que presentan simetrías y estructuras que requieren un tratamiento específico. Esta formulación constituye uno de los aportes centrales de la investigación, ya que proporciona un marco unificado para la visualización de una amplia clase de objetos pentadimensionales, sentando las bases para futuras extensiones a dimensiones aún mayores.

Herramientas computacionales y consideraciones éticas en la investigación geométrica

Para los cálculos y las visualizaciones, se utilizó el software Mathematica, el cual permitió obtener gráficos con una buena resolución y un ahorro de tiempo en las demostraciones. La elección de este entorno de programación responde a sus capacidades avanzadas para el manejo de estructuras simbólicas complejas, su biblioteca extensa de funciones matemáticas especializadas y su potente motor de renderizado gráfico, que permite generar imágenes de alta calidad que pueden ser utilizadas tanto en publicaciones académicas como en materiales didácticos. Mathematica facilita la implementación de algoritmos de inmersión, la generación de curvas y superficies paramétricas, y la manipulación interactiva de las visualizaciones, lo que permite a los investigadores explorar diferentes perspectivas y escalas sin necesidad de reprogramar cada vez los procedimientos. Esta eficiencia computacional es especialmente valiosa cuando se trabaja con objetos en espacios de alta dimensión, donde los cálculos pueden volverse rápidamente costosos en términos de tiempo de procesamiento y memoria, y donde la precisión numérica es crucial para evitar artefactos que distorsionen la interpretación geométrica.

La utilización de Mathematica en investigaciones de geometría computacional está ampliamente documentada en la literatura (Velezmoro, 2019; Anto et al., 2020; Facundo, 2023), lo que proporciona un respaldo metodológico y una comunidad de usuarios con la que se pueden compartir experiencias y soluciones a problemas comunes.

La investigación se llevó a cabo con estricto apego a los principios éticos que rigen el quehacer académico y científico, asegurando la integridad de los procedimientos y la transparencia en la presentación de los resultados. En este sentido, se utilizó una licencia del software Mathematica, financiada por la Universidad Nacional de Piura para realizar la investigación, lo que garantiza que el uso del programa sea legal y que los derechos de propiedad intelectual del software sean respetados. El empleo de licencias institucionales es una práctica común en el ámbito académico y constituye un requisito ético fundamental, ya que el uso no autorizado de software propietario vulnera los derechos de los desarrolladores y puede exponer a los investigadores a sanciones legales y académicas. Además, el uso de software con licencia legal asegura que los resultados obtenidos sean reproducibles por otros investigadores que dispongan del mismo entorno computacional, lo que contribuye a la transparencia y verificabilidad de la investigación científica. En esta investigación, se utilizan los libros que aparecen en la bibliografía presentada como fuentes de consulta y fundamentación teórica; sin embargo, los programas computacionales diseñados con el software Mathematica son propios de los responsables de las tesis, lo que implica que el código desarrollado constituye una contribución original al campo de estudio. Esta originalidad es un aspecto ético relevante, ya que implica que los autores no han recurrido a la copia o apropiación indebida

de trabajos previos, sino que han generado nuevo conocimiento y herramientas que pueden ser utilizadas por otros investigadores en el futuro, siempre que se reconozca adecuadamente la autoría y se citen las fuentes correspondientes.

La metodología descrita, con su enfoque cuantitativo, su diseño no experimental, su nivel descriptivo y su carácter aplicado, constituye un marco adecuado para la exploración sistemática de las hipersuperficies hipercilíndricas e hiperparaboidales en la quinta dimensión. La combinación de una fundamentación teórica sólida, procedimientos claramente definidos y herramientas computacionales apropiadas permite abordar el estudio de estos objetos abstractos con rigor y profundidad, generando resultados que pueden ser comunicados de manera efectiva a la comunidad académica. La visualización de objetos en espacios de alta dimensión, aunque presenta desafíos significativos, abre posibilidades fascinantes para la comprensión de estructuras matemáticas que trascienden nuestra intuición espacial, y la metodología aquí presentada proporciona un camino viable para continuar explorando estos territorios inexplorados del conocimiento geométrico.

04 Capítulo

*Los fundamentos del modelo geométrico
pentadimensional*

El diseño de un modelo que permita visualizar entes geométricos en la quinta dimensión constituye el núcleo central de esta investigación, representando un desafío que requiere la integración de conceptos avanzados de geometría, álgebra lineal y computación gráfica. Para abordar esta tarea, se ha considerado como punto de partida el cubo centrado en el origen de coordenadas y cuya longitud de los lados es 2, una elección que no es arbitraria sino que responde a la necesidad de disponer de un objeto de referencia con simetrías bien definidas que facilite la proyección de objetos de alta dimensionalidad. El cubo tridimensional, con sus ocho vértices y sus aristas ortogonales, proporciona un marco natural para extender las técnicas de visualización a dimensiones superiores, ya que su estructura combinatoria puede generalizarse de manera sistemática al hipercubo en cualquier dimensión. Los vértices son:

$$\text{Vert} = \{\{1,1,1\}, \{-1,1,1\}, \{-1, -1,1\}, \{1, -1,1\}, \{1,1, -1\}, \{-1,1, -1\}, \{-1, -1, -1\}, \{1, -1, -1\}\}$$

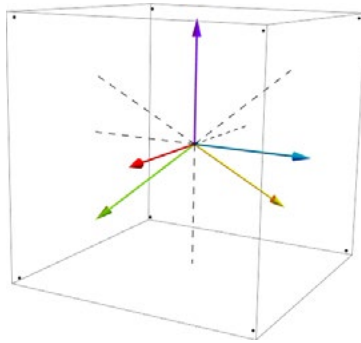
Que representa todas las combinaciones posibles de coordenadas con valores ± 1 en las tres dimensiones espaciales. Estos vértices definen las esquinas del cubo y constituyen los puntos extremos que serán utilizados como referencia para la proyección de objetos más complejos en el espacio pentadimensional, de manera similar a como los vértices de un cubo tridimensional pueden utilizarse para definir proyecciones de objetos tetradimensionales, tal como se ha documentado en investigaciones previas sobre visualización multidimensional (Velezmoro, 2019; Anto et al., 2020).

Los vectores unitarios que se toman en cuenta para la construcción del modelo son

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 = \left\{ \{1,0,0\}, \{0,1,0\}, \{0,0,1\}, \frac{\{1,-1,1\}}{\sqrt{3}}, \frac{\{1,-1,-1\}}{\sqrt{3}} \right\};$$

Donde los tres primeros corresponden a los ejes coordenados estándar del espacio tridimensional, mientras que los dos últimos son combinaciones lineales normalizadas que permiten proyectar las dimensiones cuarta y quinta en el espacio de visualización. La elección de estos vectores específicos, que involucran las raíces cuadradas de 3 en el denominador, garantiza que los vectores sean unitarios y que la proyección resultante conserve las propiedades métricas de los objetos originales en la medida de lo posible, minimizando las distorsiones que inevitablemente surgen al reducir la dimensionalidad. La disposición de estos vectores en el cubo se puede apreciar en la siguiente figura.

Figura 35. Modelo geométrico 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Este modelo presenta una modificación significativa respecto al modelo que se usó en la tesis de Escobar (2023), quien desarrolló un enfoque basado en Octave para la visualización de objetos en espacios de alta dimensionalidad. La modificación introducida en el presente trabajo permite tener una mejor apreciación de las fi-

guras que serán objeto de estudio, ya que optimiza la distribución de los ejes proyectados en el espacio tridimensional, reduciendo las interferencias visuales y mejorando la claridad de las representaciones gráficas. Esta mejora es particularmente relevante cuando se visualizan objetos complejos como el hipercilindro y el hiperparaboloide en la quinta dimensión, cuyas estructuras intrincadas requieren una proyección que preserve al máximo sus características distintivas. La experiencia acumulada en investigaciones previas (Lone et al., 2016; Facundo, 2023), ha demostrado que la elección del sistema de proyección es un factor crítico que determina la utilidad de las visualizaciones generadas, y la modificación propuesta en este modelo responde a las lecciones aprendidas de esos trabajos, incorporando ajustes que han sido validados mediante la experimentación con diferentes configuraciones de vectores directores.

La inmersión como herramienta fundamental para la visualización pentadimensional

La función de inmersión de 5D en 3D constituye el mecanismo central que permitirá bajar las ecuaciones de la dimensión quinta a la tercera dimensión, y así poder obtener información gráfica, la cual mediante observación y un análisis exhaustivo de las ecuaciones permitirá determinar de qué objetos geométricos se tratan.

La ecuación se define mediante

$$\Psi[\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}] = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5$$

La cual explícitamente es

$$\psi[\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}] = \left\{ x_1 + \frac{x_4}{\sqrt{3}} + \frac{x_5}{\sqrt{3}}, x_2 - \frac{x_4}{\sqrt{3}} - \frac{x_5}{\sqrt{3}}, x_3 - \frac{x_4}{\sqrt{3}} + \frac{x_5}{\sqrt{3}} \right\}$$

Con el software Mathematica lo definimos mediante

$$\psi[\{x1_, x2_, x3_, x4_, x5_ \}] := \{x1, x2, x3, x4, x5\} \cdot \{e1, e2, e3, e4, e5\}$$

$$\psi[\{x1, x2, x3, x4, x5\}]$$

$$\left\{ x1 + \frac{x4}{\sqrt{3}} + \frac{x5}{\sqrt{3}}, x2 - \frac{x4}{\sqrt{3}} - \frac{x5}{\sqrt{3}}, x3 - \frac{x4}{\sqrt{3}} + \frac{x5}{\sqrt{3}} \right\}$$

Esta transformación lineal, que puede ser representada mediante una matriz de 3 filas y 5 columnas, proyecta cualquier punto del espacio pentadimensional en un punto del espacio tridimensional, permitiendo así su representación gráfica en una pantalla o en una imagen impresa. La estructura de la transformación revela que las coordenadas primera, segunda y tercera contribuyen directamente a las componentes correspondientes del espacio de proyección, mientras que las coordenadas cuarta y quinta se distribuyen entre las tres componentes, mezclándose de manera que sus efectos sean visibles en todas las direcciones del espacio tridimensional. Esta mezcla es esencial para que las dimensiones adicionales no queden ocultas en la proyección, como ocurriría si se utilizara una proyección ortogonal simple que simplemente descartara las coordenadas cuarta y quinta, lo que haría invisible cualquier estructura que dependa de ellas. La implementación de esta transformación en el software Mathematica se realiza mediante la definición de una función que toma como argumento una lista de cinco números reales y devuelve una lista de tres números, lo que permite aplicar la inmersión a cualquier objeto paramétrico definido en el espacio pentadimen-

sional, como las curvas y superficies que se estudiarán en las secciones siguientes.

La inmersión así definida tiene propiedades matemáticas importantes que merecen ser destacadas. En primer lugar, es una transformación lineal inyectiva cuando se restringe a un subespacio de dimensión 3, lo que significa que puntos diferentes en el espacio pentadimensional pueden proyectarse al mismo punto en el espacio tridimensional, una consecuencia inevitable de la reducción de dimensionalidad que debe ser tomada en cuenta al interpretar las visualizaciones. En segundo lugar, la transformación preserva las combinaciones lineales, de modo que las curvas paramétricas que son combinaciones lineales de vectores base se proyectan como curvas que son combinaciones lineales de las proyecciones de esos vectores, lo que simplifica el análisis de las propiedades geométricas de los objetos visualizados. En tercer lugar, la transformación es continua y diferenciable, lo que garantiza que las proyecciones de objetos suaves sean también objetos suaves, sin la aparición de singularidades o discontinuidades espurias que pudieran confundir al observador. Estas propiedades, que son comunes a todas las inmersiones lineales, hacen que la transformación propuesta sea adecuada para el propósito de visualización, proporcionando representaciones que, aunque inevitablemente distorsionadas, mantienen una correspondencia topológica con los objetos originales que permite un análisis geométrico significativo.

El hipercilindro pentadimensional y sus propiedades estructurales

La ecuación del hipercilindro 5D en forma paramétrica viene dada por

$$\text{HipeCili5D}[\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, R] = \{R \cos[u_3] \sin[u_1] \sin[u_2], -R \cos[u_1] \cos[u_3] \sin[u_2], R \cos[u_2] \cos[u_3], R \sin[u_3], u_4\}$$

lo que en cartesianas viene dado por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2, x_5 \in \mathbb{R}$$

Demostración.

Para encontrar la ecuación del Hipercilindro 5D se necesita definir la rotación respecto al hiperplano generado por los ejes x_3 , x_4 y x_5 .

El cual viene dado por

```
Rotx3x4x5[θ] := {{Cos[θ], -Sin[θ], 0, 0, 0}, {Sin[θ], Cos[θ], 0, 0, 0},
  {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
```

La cual escrita en forma matricial es

```
Rotx3x4x5[θ] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta] & -\sin[\theta] & 0 & 0 & 0 \\ \sin[\theta] & \cos[\theta] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta la definición del Hipercilindro 4D dada en la sección 2.2.5 definimos el Hipercilindro 5D mediante

```
HipeCili5D[{u1_, u2_, u3_, u4_}, R_] :=
  Rotx3x4x5[u1]. (Prepend[HipeCili4D[{u2, u3, u4}, R], 0])
```

Ahora veamos la ecuación en forma explícita

HipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, R]

{R Cos[u3] Sin[u1] Sin[u2],
- R Cos[u1] Cos[u3] Sin[u2], R Cos[u2] Cos[u3], R Sin[u3], u4}

Por otra parte, se tiene de la ecuación obtenida

**HipeCili5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}, R] $\|1\|^2 +$
**HipeCili5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}, R] $\|2\|^2 +$
**HipeCili5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}, R] $\|3\|^2 +$
HipeCili5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}, R] $\|4\|^2$ // Simplify
 R^2******

En consecuencia, se tiene que en coordenadas cartesianas la ecuación el Hiper Cilindro 5D es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2, x_5 \in \mathbb{R}$$

Ahora bien, si aplicamos la inmersión

hipeCili5D[{u1_, u2_, u3_, u4_}, R_] := Ψ [HipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, R]]

Luego calculamos explícitamente la ecuación que nos permitirá explorar al Hiper cilindro en la quinta dimensión.

hipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, R]

$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + R \cos[u3] \sin[u1] \sin[u2] + \frac{R \sin[u3]}{\sqrt{3}}, \right.$
 $\left. - R \cos[u1] \cos[u3] \sin[u2] - \frac{R \sin[u3]}{\sqrt{3}}, \frac{u4}{\sqrt{2}} + R \cos[u2] \cos[u3] - \frac{R \sin[u3]}{\sqrt{3}} \right\}$

Las curvas paramétricas del hiper cilindro pentadi-mensional

En este caso se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_1 .

```

curvu1 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1],
      {u2, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8}, {u3, 0, 2 Pi, Pi / 8}, {u4, 0, 4, 1 / 2}], 3]], 3]]];

```

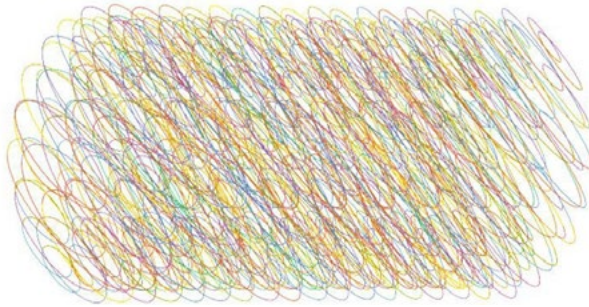
Esta lista es muy extensa, de tal modo que no se presentara, sin embargo, si mostramos el gráfico correspondiente

```

gcurvu1 = ParametricPlot3D[curvu1 // Evaluate, {u1, -Pi / 2, Pi / 2},
  Boxed → False, Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]

```

Figura 36. Los paralelos involucrados en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Los paralelos en realidad pertenecen a esferas que están radicando en el Hipercilindro 5D

Las curvas u_2 – paramétricas.

En este caso se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_2 .

```

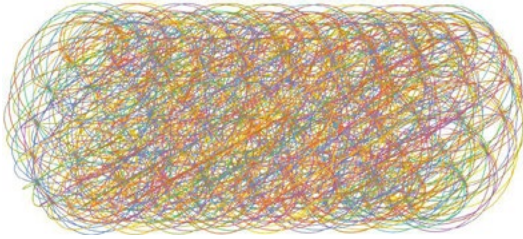
curvu2 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1], {u1, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8},
      {u3, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8}, {u4, 0, 4, 1 / 2}], 3]], 3]]];

```

No se muestra la lista por lo extensa que es, pero mostramos la gráfica de los objetos geométricos involucrados mediante

```
gcurvu2 = ParametricPlot3D[curvu2 // Evaluate, {u2, -Pi, Pi}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 37. Meridianos en cada esfera que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Podemos hablar de polos sub locales, que están en cada una de las circunferencias observadas.

Las curvas u_3 – parametricas

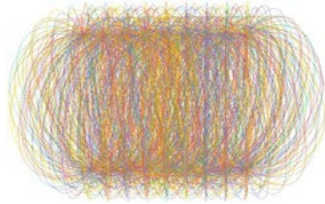
En este caso se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_3 .

```
curvu3 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hiperCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 8},
      {u2, -Pi, Pi, Pi / 8}, {u4, 0, 2, 1 / 4}], 3]], 3]];
```

Tampoco se muestra la lista, pero si la figura correspondiente a los objetos geométricos involucrados

```
gcurvu3 = ParametricPlot3D[curvu3 // Evaluate, {u3, -Pi / 2, Pi / 2},
  Boxed → False, Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 38. Polos locales en cada Hiperesfera 4D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Podemos hablar de polos locales, que están en cada una de las hiperesfera 4D observadas.

Las curvas u_4 – *parametricas*.

```
curvu4 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipecili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1],
      {u1, -Pi/2, Pi/2, Pi/4}, {u2, -Pi, Pi, Pi/4}, {u3, -Pi/2, Pi/2, Pi/8}]],
      3]];
```

Análogamente se construye una lista usando el comando Table dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_4 .

No se muestra la lista, pero si la figura correspondiente a los objetos geométricos involucrados

```
gcurvu4 = ParametricPlot3D[curvu4 // Evaluate, {u4, 0, 4}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 39. Rayos pertenecientes a hipercilindros 4D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Otras curvas en el Hipercilindro 5D

En este caso tomaremos la decisión de que $u_1 = 40t$, $u_2 = t$ los otros dos parámetros tomaran valores específicos, como se muestra en el siguiente código.

```
HipeCili5D[{40 t, t, u3, u4}, 1]
```

```
{Cos[u3] Sin[t] Sin[40 t], -Cos[40 t] Cos[u3] Sin[t], Cos[t] Cos[u3], Sin[u3], u4}
```

A esta le aplicamos la inmersión.

```
hipeCili5D[{40 t, t, u3, u4}, 1]
```

$$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[u3] \sin[t] \sin[40t] + \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, -\cos[40t] \cos[u3] \sin[t] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[t] \cos[u3] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

Generamos la lista

```
tC1 =
```

```
Union[
```

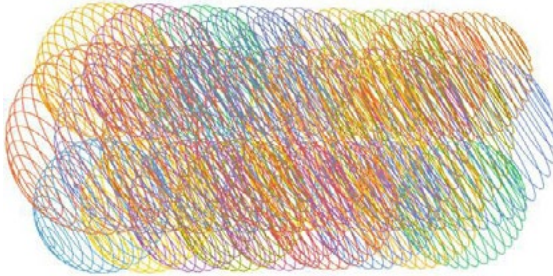
```
Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1],
```

```
{u3, -Pi/2, Pi/2, Pi/4}, {u4, 0, 4, 1/2}], 3]] /. {u1 -> 40 t, u2 -> t};
```

Ahora veremos la gráfica mediante

```
gtC1 = ParametricPlot3D[tC1 // Evaluate, {t, 0, Pi}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

Figura 40. Hélices esféricas dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

En este caso tomaremos la decisión de que $u_1 = t$, $u_2 = 40t$ los otros dos parámetros tomaran valores específicos, como se muestra en el siguiente código.

```
HipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1]
```

```
{Cos[u3] Sin[u1] Sin[u2], -Cos[u1] Cos[u3] Sin[u2], Cos[u2] Cos[u3], Sin[u3], u4}
```

Le aplicamos la inmersión

```
hipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1]
```

$$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[u3] \sin[u1] \sin[u2] + \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\cos[u1] \cos[u3] \sin[u2] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[u2] \cos[u3] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

Generamos la lista

```
tc2 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, u2, u3, u4}, 1],
      {u3, -Pi/2, Pi/2, Pi/4}, {u4, 0, 4, 1/2}], 3]] /. {u1 → t, u2 → 40 t};
```

El grafico lo obtenemos mediante

```
gtC2 = ParametricPlot3D[tc2 // Evaluate, {t, -Pi/2, Pi/2}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

Figura 41. Meridianos dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Consideramos otras curvas

```
CurvaC5 = HipeCili5D[{2, 3 t, t, 2}, 1]
```

```
{Cos[t] Sin[2] Sin[3 t], -Cos[2] Cos[t] Sin[3 t], Cos[t] Cos[3 t], Sin[t], 2}
```

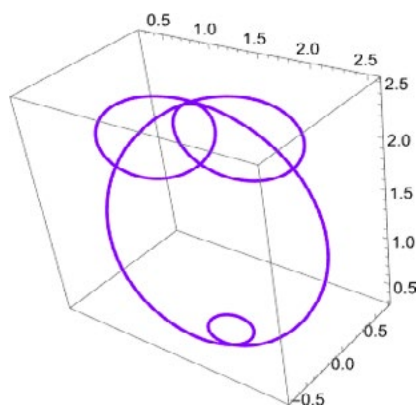
Con la inmersión

```
hipeCili5D[{2, 3 t, t, 2}, 1]
```

$$\left\{ \sqrt{2} + \frac{\sin[t]}{\sqrt{3}} + \cos[t] \sin[2] \sin[3t], \right. \\ \left. - \frac{\sin[t]}{\sqrt{3}} - \cos[2] \cos[t] \sin[3t], \sqrt{2} + \cos[t] \cos[3t] - \frac{\sin[t]}{\sqrt{3}} \right\}$$

```
gCurvaC5 = ParametricPlot3D[hipeCili5D[{2, 3 t, t, 2}, 1], {t, -Pi, Pi},
  PlotStyle → Hue[0.75]]
```

Figura 42. Gráfico de la Curva C5.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

CurvaC6 = HipeCili5D[{2, 4 t, t, 2}, 1]

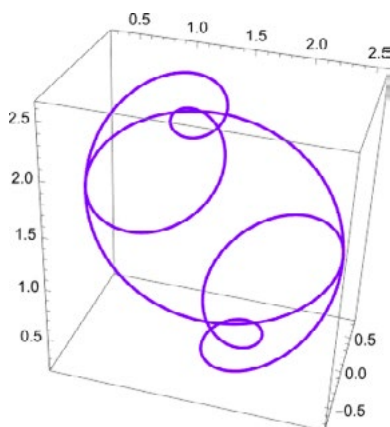
$\{\cos[t] \sin[2] \sin[4t], -\cos[2] \cos[t] \sin[4t], \cos[t] \cos[4t], \sin[t], 2\}$

hipeCili5D[{2, 4 t, t, 2}, 1]

$$\left\{ \sqrt{2} + \frac{\sin[t]}{\sqrt{3}} + \cos[t] \sin[2] \sin[4t], \right. \\ \left. -\frac{\sin[t]}{\sqrt{3}} - \cos[2] \cos[t] \sin[4t], \sqrt{2} + \cos[t] \cos[4t] - \frac{\sin[t]}{\sqrt{3}} \right\}$$

**gCurvaC6 = ParametricPlot3D[hipeCili5D[{2, 4 t, t, 2}, 1], {t, -Pi, Pi},
PlotStyle → Hue[0.75]]**

Figura 43. Gráfico de la CurvaC6.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

CurvaC7 = HipeCili5D[{2, 5 t, 3 t, 2}, 1]

$\{\cos[3t] \sin[2] \sin[5t], -\cos[2] \cos[3t] \sin[5t], \cos[3t] \cos[5t], \sin[3t], 2\}$

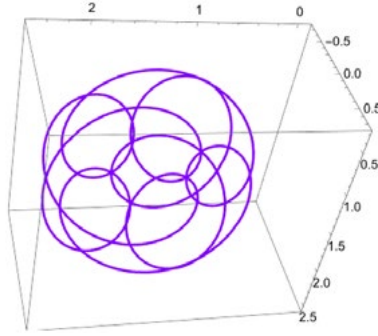
hipeCili5D[{2, 5 t, 3 t, 2}, 1]

$\left\{ \sqrt{2} + \frac{\sin[3t]}{\sqrt{3}} + \cos[3t] \sin[2] \sin[5t], \right.$

$\left. - \frac{\sin[3t]}{\sqrt{3}} - \cos[2] \cos[3t] \sin[5t], \sqrt{2} + \cos[3t] \cos[5t] - \frac{\sin[3t]}{\sqrt{3}} \right\}$

**gCurvaC7 = ParametricPlot3D[hipeCili5D[{2, 5 t, 3 t, 2}, 1], {t, -Pi, Pi},
PlotStyle → Hue[0.75]]**

Figura 44. Gráfico de la CurvaC7.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las Superficies $u_i u_j, i, j=1,2,3,4$ paramétricas en el Hipercilindro 5D

En este contexto hay seis familias de superficies las cuales vienen determinadas por el apareamiento de los parámetros involucrados en la definición de la Hipercilindro 5D.

$$\{u_1 u_2, u_1 u_3, u_1 u_4, u_2 u_3, u_2 u_4, u_3 u_4\}$$

1. Las superficies $u_1 u_2$ en el Hipercilindro 5D.

HipeCili5D[{u1, u2, k1, k2}, 1]

$$\{\cos[k1] \sin[u1] \sin[u2], -\cos[k1] \cos[u1] \sin[u2], \cos[k1] \cos[u2], \sin[k1], k2\}$$

Con la inmersión

hipeCili5D[{u1, u2, k1, k2}, 1]

$$\left\{ \frac{k2}{\sqrt{2}} + \frac{\sin[k1]}{\sqrt{3}} + \cos[k1] \sin[u1] \sin[u2], \right. \\ \left. -\frac{\sin[k1]}{\sqrt{3}} - \cos[k1] \cos[u1] \sin[u2], \frac{k2}{\sqrt{2}} + \cos[k1] \cos[u2] - \frac{\sin[k1]}{\sqrt{3}} \right\}$$

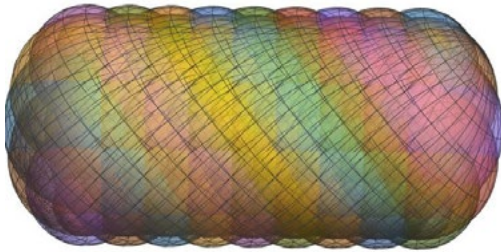
Luego generamos la lista

```
sur =
  Partition[
    Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, u2, k1, k2}, 1], {k1, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8},
      {k2, 0, 4, 1 / 2}], 3];
```

Ahora la gráfica

```
ParametricPlot3D[sur // Evaluate, {u1, -Pi / 2, Pi / 2}, {u2, -Pi, Pi},
  PlotStyle -> Opacity[0.4]]
```

Figura 45. Esferas en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las esferas se encuentran apiñadas, y la cantidad es infinita.

Ahora vamos a mostrar una selección de dos familias de esferas que están en el Hipercilindro 5D y son familias de esferas paralelas todos tienen el mismo radio.

Para ello consideramos la siguiente lista

```
Length[sur11]

Sur11 = Table[hipeCili5D[{u1, u2, k1, k2}, 1], {k1, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8},
  {k2, 0, 4, 1 / 2}];
```

9

La primera sub lista, teniendo en cuenta la inmersión es

```
sur11[[1]]
```

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \right. \\ \left\{ \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ \frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left. \left\{ \frac{7}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

Y la novena

sur11[9]

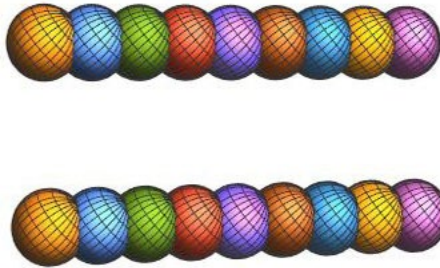
$$\left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \right. \\ \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left\{ \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \\ \left. \left\{ \frac{7}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

En ambos casos los elementos de las sub listas son ternas de números.

Ahora consideramos la segunda y la octava sub lista. Y aplicamos dos códigos para obtener sus gráficas

```
s1 = ParametricPlot3D[sur11[2] // Evaluate, {u1, -Pi/2, Pi/2}, {u2, -Pi, Pi},
  Boxed → False, Axes → False]
s2 = ParametricPlot3D[sur11[8] // Evaluate, {u1, -Pi/2, Pi/2}, {u2, -Pi, Pi},
  Boxed → False, Axes → False]
Show[s1, s2, PlotRange → All]
```

Figura 46, Dos familias de esferas en el Hipercilindro 5D.

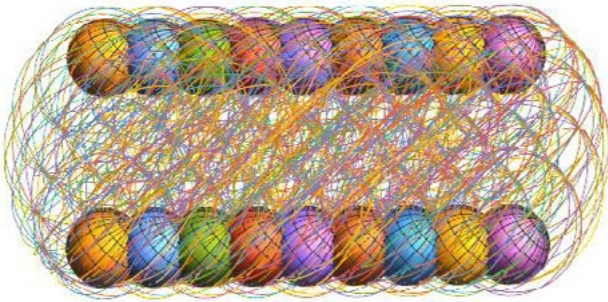


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Luego se muestra junto a las curvas paramétricas

Show[s1, s2, gcurvu2, PlotRange → All]

Figura 47. Dos familias de esferas junto al Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Los centros de las familias de cilindros mostradas están en un plano. Vamos a justificarlo lo polos norte de la familia de esferas `Sur11[[2]]` se obtienen mediante

pn1 = Sur11[[2]] /. {u1 → 0, u2 → Pi / 2}

las gráficas se obtienen mediante

```
gpn1 = Graphics3D[{Green, PointSize[0.02], Point /@ pn1 /. {u1 → 0, u2 → Pi / 2}}]
gps1 = Graphics3D[{Blue, PointSize[0.02], Point /@ ps1 /. {u1 → 0, u2 → Pi / 2}}]
gpn2 = Graphics3D[{Hue[0.55], PointSize[0.02], Point /@ pn2}]
gps2 = Graphics3D[{Hue[0.75], PointSize[0.02], Point /@ ps2}]
```

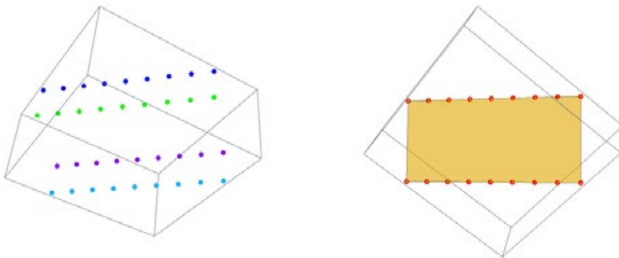
Los centros

```
gcen1cen2 = Graphics3D[{Hue[0], PointSize[0.02], Point /@ cen1, Point /@ cen2}]
```

el plano de los centros

```
rectangulo =
Graphics3D[{Hue[0.15], Opacity[0.6], Polygon[{cen1[[1]], cen1[[9]], cen2[[9]], cen2[[1]]},
Point /@ cen1, Point /@ cen2]}
Show[gcen1cen2, rectangulo]
```

Figura 48. Polos norte y sur de las esferas en $\text{Sur11}[[2]]$ y $\text{Sur11}[[8]]$.

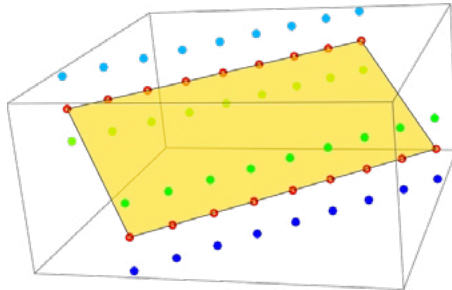


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

todo junto se muestra mediante

```
Show[gpn1, gps1, gpn2, gps2, gcen1cen2, rectangulo]
```

Figura 49. Polos norte y sur de las esferas y el rectángulo que los contiene.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Por si hubiera alguna duda de que los centros son coplanares aplicamos

```
PunCopla[Partition[Flatten[Table[{cen1[[i]], cen2[[i]], {i, 9}} // N], 3]]
```

Los puntos son coplanares

Por otra parte, la familia de esferas que están en la siguiente lista

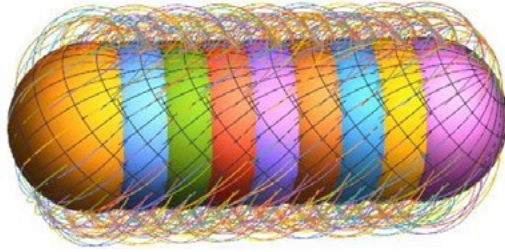
```
sur11[[5]]
```

$$\left\{ \begin{aligned} & \{ \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \cos[u_2] \}, \\ & \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cos[u_2] \right\}, \\ & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos[u_2] \right\}, \\ & \left\{ \frac{3}{2\sqrt{2}} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \frac{3}{2\sqrt{2}} + \cos[u_2] \right\}, \\ & \{ \sqrt{2} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \sqrt{2} + \cos[u_2] \}, \\ & \left\{ \frac{5}{2\sqrt{2}} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \frac{5}{2\sqrt{2}} + \cos[u_2] \right\}, \\ & \left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \frac{3}{\sqrt{2}} + \cos[u_2] \right\}, \\ & \left\{ \frac{7}{2\sqrt{2}} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], \frac{7}{2\sqrt{2}} + \cos[u_2] \right\}, \\ & \{ 2\sqrt{2} + \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \sin[u_2], 2\sqrt{2} + \cos[u_2] \} \end{aligned} \right\}$$

Graficamos

```
s3 = ParametricPlot3D[sur11[[5]] // Evaluate, {u1, -Pi / 2, Pi / 2}, {u2, -Pi, Pi},
  Boxed → False, Axes → False]
Show[s3, gcurvu2, PlotRange → All]
```

Figura 50. Familia de esferas junto al Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

2. Las superficies $u_1 u_3$ en el Hipercilindro 5D.

En este caso se varían los parámetros u_2 y u_4 , de tal manera que las ecuaciones que quedan estén en función de los parámetros u_1 y u_3

HipeCili5D[{u1, k1, u3, k2}, 1]

$\{\cos[u_3] \sin[k_1] \sin[u_1], -\cos[u_1] \cos[u_3] \sin[k_1], \cos[k_1] \cos[u_3], \sin[u_3], k_2\}$

Con la inmersión

HipeCili5D[{u1, Pi / 4, u3, Pi / 3}, 1]

$\left\{ \frac{\cos[u_3] \sin[u_1]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[u_1] \cos[u_3]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[u_3]}{\sqrt{2}}, \sin[u_3], \frac{\pi}{3} \right\}$

hipeCili5D[{u1, k1, u3, k2}, 1]

$\left\{ \frac{k_2}{\sqrt{2}} + \cos[u_3] \sin[k_1] \sin[u_1] + \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \right.$
 $\left. -\cos[u_1] \cos[u_3] \sin[k_1] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \frac{k_2}{\sqrt{2}} + \cos[k_1] \cos[u_3] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}} \right\}$

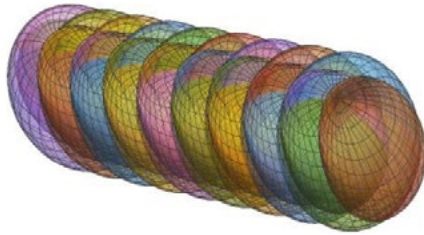
Luego generamos la lista

```
sur2 =
  Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, k1, u3, k2}, 1], {k1, -Pi, Pi, Pi / 4},
    {k2, 0, 4, 1 / 2}], 1], 3];
```

Ahora la grafica

```
ParametricPlot3D[sur2 // Evaluate, {u1, -Pi / 2, Pi / 2}, {u3, -Pi / 2, Pi / 2},
  PlotStyle -> Opacity[0.4], Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 51. Esferas en Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las esferas se encuentran apiñadas, y la cantidad es infinita, lógicamente acá se muestran algunas.

3. Las superficies $u_1 u_4$ en el Hipercilindro 5D.

En este caso se varían los parámetros u_1 y u_4 , de tal manera que las ecuaciones que quedan estén en función de los parámetros u_2 y u_3

```
HipeCili5D[{u1, Pi / 4, Pi / 3, u4}, 1]
{Cos[k2] Sin[k1] Sin[u1], -Cos[k2] Cos[u1] Sin[k1], Cos[k1] Cos[k2], Sin[k2], u4}
```

Caso particular

```
HipeCili5D[{u1, Pi / 4, Pi / 3, u4}, 1]
```

$$\left\{ \frac{\sin[u_1]}{2\sqrt{2}}, -\frac{\cos[u_1]}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, u_4 \right\}$$

Con la inmersión

```
hipeCili5D[{u1, Pi / 4, Pi / 3, u4}, 1]
```

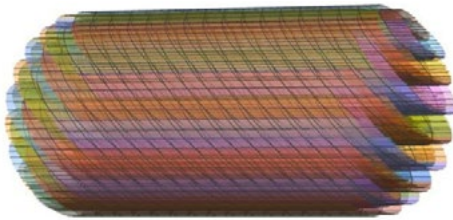
Luego generamos la lista

```
sur3 =  
  Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{u1, k1, k2, u4}, 1], {k1, -Pi, Pi, Pi / 8},  
    {k2, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8}]], 3];
```

Ahora la gráfica

```
ParametricPlot3D[sur3 // Evaluate, {u1, -Pi / 2, Pi / 2}, {u4, 0, 4},  
  PlotStyle → Opacity[0.4], Axes → False, Boxed → False]
```

Figura 52. Cilindros en Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Los cilindros están apiñados, y la cantidad es infinita, lógicamente acá se muestran algunas.

4. Las superficies $u_2 u_3$ en el Hipercilindro 5D.

En este caso la familia está determinada por

```
HipeCili5D[{k1, u2, u3, k2}, 1]
```

```
{Cos[u3] Sin[k1] Sin[u2], -Cos[k1] Cos[u3] Sin[u2], Cos[u2] Cos[u3], Sin[u3], k2}
```

Tomamos el caso particular

```
HipeCili5D[{Pi, u2, u3, Pi}, 1]
```

$$\{0, \cos[u_3] \sin[u_2], \cos[u_2] \cos[u_3], \sin[u_3], \pi\}$$

Con la inmersión

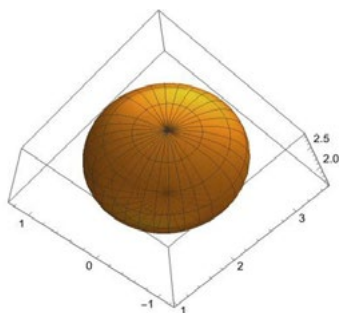
hipeCili5D[{Pi, u2, u3, Pi}, 1]

$$\left\{ \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \cos[u_3] \sin[u_2] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \cos[u_2] \cos[u_3] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

luego el grafico

g1u2u3 = ParametricPlot3D[hipeCili5D[{Pi, u2, u3, Pi}, 1], {u2, -Pi/2, Pi/2}, {u3, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Opacity[0.8]]

Figura 53. Esfera en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Otra superficie es

HipeCili5D[{Pi/2, u2, u3, Pi/4}, 1]

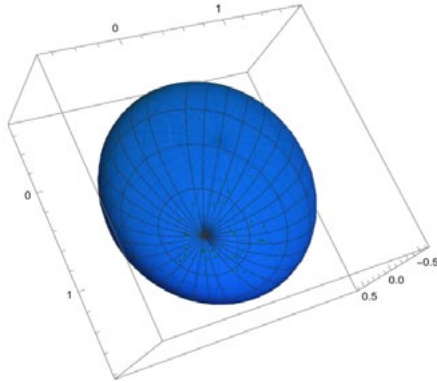
$$\left\{ \cos[u_3] \sin[u_2], 0, \cos[u_2] \cos[u_3], \sin[u_3], \frac{\pi}{4} \right\}$$

Con la inmersión

$$\left\{ \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \cos[u_3] \sin[u_2] + \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, -\frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \cos[u_2] \cos[u_3] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

g2u2u3 = ParametricPlot3D[hipeCili5D[{Pi/2, u2, u3, Pi/4}, 1], {u2, -Pi/2, Pi/2}, {u3, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Opacity[0.8], Hue[0.6]}]

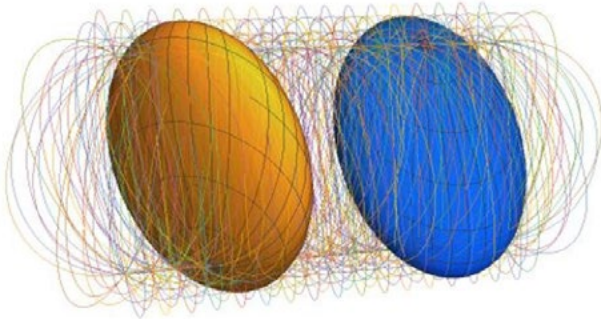
Figura 54. Esfera en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Al presentarlas las esferas juntas a la familia de curvas g_{curvu3} se tiene

Figura 55. Dos esferas en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

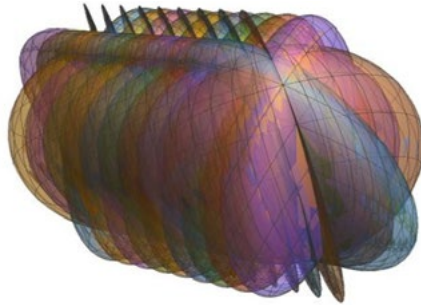
Luego podemos generalizar

```
sur4 =
  Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{k1, u2, u3, k2}], 1], {k1, -Pi, Pi, Pi/4},
    {k2, 0, 2, 1/4}]]], 3];
```

Lo graficamos

```
ParametricPlot3D[sur4 // Evaluate, {u2, -Pi / 2, Pi / 2}, {u3, -Pi, Pi},
PlotStyle -> Opacity[0.4], Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 56. Familia de esferas u_2u_3 en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las familias de esferas están en las Hiperesferas 4D, la cuales a la vez están en el Hipercilindro 5D.

5. Las superficies u_2u_4 en el Hipercilindro 5D.

En este caso la familia está determinada por

```
HipeCili5D[{k1, u2, k2, u4}, 1]
```

```
{Cos[k2] Sin[k1] Sin[u2], -Cos[k1] Cos[k2] Sin[u2], Cos[k2] Cos[u2], Sin[k2], u4}
```

Con la inmersión

```
hipeCili5D[{k1, u2, k2, u4}, 1]
```

$$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + \frac{\sin[k2]}{\sqrt{3}} + \cos[k2] \sin[k1] \sin[u2], \right. \\ \left. -\frac{\sin[k2]}{\sqrt{3}} - \cos[k1] \cos[k2] \sin[u2], \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[k2] \cos[u2] - \frac{\sin[k2]}{\sqrt{3}} \right\}$$

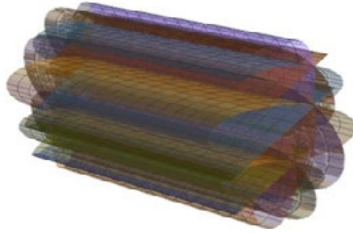
Ahora generamos la siguiente familia de superficies

```
sur5 =
  Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{k1, u2, k2, u4}, 1], {k1, -Pi/2, Pi/2, Pi/4},
    {k2, 0, 2 Pi, Pi/4}]], 3];
```

Enseguida se obtiene la gráfica

```
ParametricPlot3D[sur5 // Evaluate, {u2, -Pi, Pi}, {u4, 0, 4}, PlotStyle -> Opacity[0.4],
  Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 57. Familia de cilindros $u_2 u_4$ en el Hiper Cilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

6. Las superficies $u_3 u_4$ en el Hiper cilindro 5D.

La familia de estas superficies viene dada por

```
HipeCili5D[{k1, k2, u3, u4}, 1]
```

$$\{\cos[u_3] \sin[k_1] \sin[k_2], -\cos[k_1] \cos[u_3] \sin[k_2], \cos[k_2] \cos[u_3], \sin[u_3], u_4\}$$

Con la inmersión

```
hipeCili5D[{k1, k2, u3, u4}, 1]
```

$$\left\{ \frac{u_4}{\sqrt{2}} + \cos[u_3] \sin[k_1] \sin[k_2] + \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\cos[k_1] \cos[u_3] \sin[k_2] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \frac{u_4}{\sqrt{2}} + \cos[k_2] \cos[u_3] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

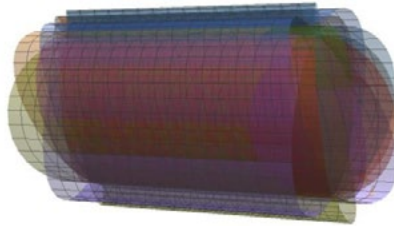
Generamos la familia de estas superficies

```
sur6 =
  Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{k1, k2, u3, u4}, 1], {k1, -Pi/2, Pi/2, Pi/4},
    {k2, -Pi/2, Pi/2, Pi/4}]], 3];
```

Luego la graficamos

```
ParametricPlot3D[surf6 // Evaluate, {u3, 0, 2 Pi}, {u4, 0, 4}, PlotStyle -> Opacity[0.4],  
Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 58. Familia de cilindros $u_3 u_4$ en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las Hipersuperficies 4D $u_i u_j u_k$, $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ en el Hipercilindro 5D

Esta hipersuperficies dependen de tres parámetros, según esto tenemos tres familias de hipersuperficies,

$$\{u_1 u_2 u_3, u_1 u_2 u_4, u_2 u_3 u_4\}$$

1. Las hipersuperficies $u_1 u_2 u_3$ en el Hipercilindro 5D.

La familia de Hipersuperficies viene dada por la siguiente ecuación

HipeCili5D[{**u1**, **u2**, **u3**, **k**}, 1]

$$\{\cos[u_3] \sin[u_1] \sin[u_2], -\cos[u_1] \cos[u_3] \sin[u_2], \cos[u_2] \cos[u_3], \sin[u_3], k\}$$

Con la inmersión

hipeCili5D[{**u1**, **u2**, **u3**, **k**}, 1]

$$\left\{ \frac{k}{\sqrt{2}} + \cos[u_3] \sin[u_1] \sin[u_2] + \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\cos[u_1] \cos[u_3] \sin[u_2] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{2}} + \cos[u_2] \cos[u_3] - \frac{\sin[u_3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

Generamos la siguiente lista

```
hipesur1 = Table[hipecili5D[{u1, u2, u3, k}, 1], {k, 0, 4, 1/2}]
```

De esa lista escogemos la que está ubicada en la quinta posición.

```
hipesur1[[5]]
```

$$\left\{ \sqrt{2} + \cos[u3] \sin[u1] \sin[u2] + \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\cos[u1] \cos[u3] \sin[u2] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \sqrt{2} + \cos[u2] \cos[u3] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

Esta depende de tres parámetros, entonces es una hipersuperficie 4D

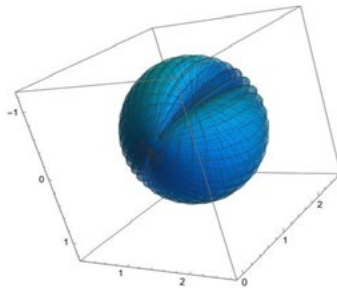
Luego generamos la siguiente familia

```
thipesur15 = Table[hipesur1[[5]], {u1, -Pi/2, Pi/2, Pi/16}];
```

Luego la graficamos mediante

```
gthipesur15 = ParametricPlot3D[thipesur15, {u2, -Pi/2, Pi/2}, {u3, 0, 2 Pi}, \\ PlotStyle -> {Hue[0.55], Opacity[0.4]}]
```

Figura 59. Una Hiperesfera 4D que está dentro del Hipercilindro 5D.

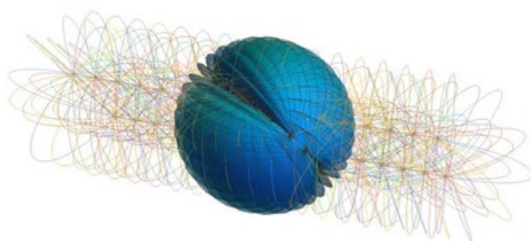


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Luego la mostramos junto a gcurvu3

```
Show[gcurvu3, gthipesur15]
```

Figura 60. La Hiperesfera 4D junto con gcurvu3 en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

2. Las hipersuperficies $u_1 u_2 u_4$ en el Hipercilindro 5D.

En este caso las hipersuperficies están determinadas por la siguiente ecuación.

HipeCili5D[{**u1**, **u2**, **k**, **u4**}, 1]

{Cos[k] Sin[u1] Sin[u2], -Cos[k] Cos[u1] Sin[u2], Cos[k] Cos[u2], Sin[k], u4}

Mediante la inmersión

hipeCili5D[{**u1**, **u2**, **k**, **u4**}, 1]

$$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + \frac{\sin[k]}{\sqrt{3}} + \cos[k] \sin[u1] \sin[u2], -\frac{\sin[k]}{\sqrt{3}} - \cos[k] \cos[u1] \sin[u2], \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[k] \cos[u2] - \frac{\sin[k]}{\sqrt{3}} \right\}$$

Generamos la siguiente lista

hipesur2 = Table[hipeCili5D[{**u1**, **u2**, **k**, **u4**}, 1], {**k**, 0, 2Pi, Pi/4}];

Ahora como estas ecuaciones dependen de tres parámetros, vamos a escoger la quinta Con esta ecuación generamos la siguiente familia

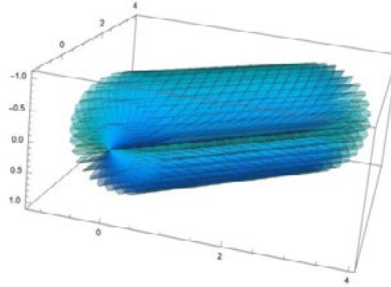
hipesur2[[5]]

thipesur25 = Table[hipesur2[[5]], {**u1**, -Pi/2, Pi/2, Pi/16}];

Luego lo graficamos

thipesur25 = Table[hipesur2[[5]], {u1, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 16}];

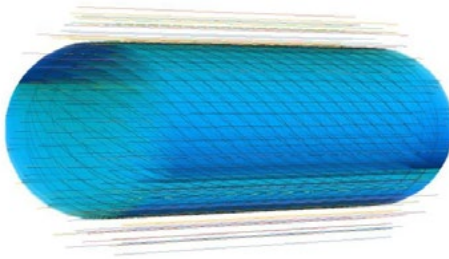
Figura 61. Un cilindro 4D que está dentro del Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Luego la mostramos junto a gcurvu3

Figura 62. La Hiperesfera 4D junto con gcurvu4 en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

3. Las hipersuperficies $u_2 u_3 u_4$ en el Hipercilindro 5D.

La ecuación que determinas estas hipersuperficies son

HipeCili5D[{k, u2, u3, u4}, 1]

$\{\text{Cos}[u3] \text{Sin}[k] \text{Sin}[u2], -\text{Cos}[k] \text{Cos}[u3] \text{Sin}[u2], \text{Cos}[u2] \text{Cos}[u3], \text{Sin}[u3], u4\}$

Aplicando la inmersión

hipeCili5D[{k, u2, u3, u4}, 1]

$$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[u3] \sin[k] \sin[u2] + \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\cos[k] \cos[u3] \sin[u2] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[u2] \cos[u3] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

Generamos la siguiente lista

hipesur3 = Table[hipeCili5D[{k, u2, u3, u4}, 1], {k, -Pi/2, Pi/2, Pi/8}];

Ahora como estas ecuaciones dependen de tres parámetros, vamos a escoger la quinta

hipesur3[[5]]

$$\left\{ \frac{u4}{\sqrt{2}} + \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, -\cos[u3] \sin[u2] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}}, \frac{u4}{\sqrt{2}} + \cos[u2] \cos[u3] - \frac{\sin[u3]}{\sqrt{3}} \right\}$$

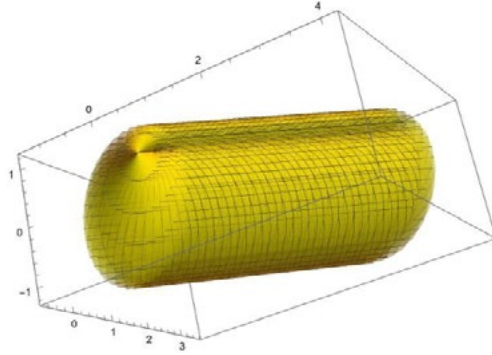
Luego generamos la siguiente familia

thipesur35 = Table[hipesur3[[5]], {u2, -Pi/2, Pi/2, Pi/16}];

Luego lo graficamos

**gthipesur35 = ParametricPlot3D[thipesur35, {u3, 0, 2 Pi}, {u4, 0, 4},
PlotStyle → {Hue[0.55], Opacity[0.4]}]**

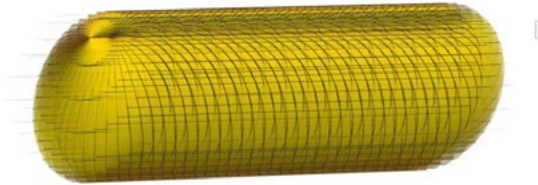
Figura 63. Un hipercilindro 4D que está dentro del Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Show[gcurvu4, gthipesur35]

Figura 64. Otro hipercilindro 4D junto con gcurvu4 en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

El Hiperparaboloide en 5D

Teorema 9

La ecuación del Hiperparaboloide 5D viene dado por

$$HParaboloide4D[\{u1, u2, u3\}] = \{u3\sin[u1]\sin[u2], -u3\cos[u2]\sin[u1], u3\cos[u1], u3^2\}$$

y en cartesianas

$$x_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Para encontrar la ecuación del Hiperparaboloide 5D usaremos la definición de la rotación respecto al hiperplano generado por los ejes x_3 , x_4 y x_5 .

```
HipeParab5D[{u1_, u2_, u3_, u4_}] :=  
  Rotx3x4x5[u1].(Prepend[HParaboloide4D[{u2, u3, u4}], 0])
```

Ahora bien, si tenemos en cuenta la definición del Hiperparaboloide 4D dada en la sección 2.2.6 definimos el Hiperparaboloide 5D mediante

Ahora veamos la ecuación en forma explícita

```
HipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}]  
{u4 Sin[u1] Sin[u2] Sin[u3],  
  u4 Cos[u1] Sin[u2] Sin[u3], -u4 Cos[u3] Sin[u2], u4 Cos[u2], u4^2}
```

Por otra parte, se tiene de la ecuación obtenida

```
HipeParab5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}] ||1||^2 +  
  HipeParab5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}] ||2||^2 +  
  HipeParab5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}] ||3||^2 +  
  HipeParab5D[{u2 + Pi / 2, u1, u3, u4}] ||4||^2 // Simplify  
u4^2
```

En consecuencia, se tiene que en coordenadas cartesianas la ecuación el Hiperparaboloide 5D es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5$$

Si aplicamos la inmersión

```
hipeParab5D[{u1_, u2_, u3_, u4_}] := ψ[HipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}]]
```

Luego calculamos explícitamente la ecuación que nos permitirá explorar al Hiperparaboloide en la quinta dimensión.

Aplicando la inmersión tenemos

```
hipeParab5D[{u1_, u2_, u3_, u4_}] := ψ[HipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}]]
```

```
hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}]
```

$$\left\{ \frac{u4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u4 \cos[u2]}{\sqrt{3}} + u4 \sin[u1] \sin[u2] \sin[u3], \right. \\ \left. - \frac{u4 \cos[u2]}{\sqrt{3}} + u4 \cos[u1] \sin[u2] \sin[u3], \frac{u4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u4 \cos[u2]}{\sqrt{3}} - u4 \cos[u3] \sin[u2] \right\}$$

Las curvas u_i , $i = 1, 2, 3, 4$ paramétricas en el Hiperparaboloide 5D

En esta sección veremos las curvas paramétricas básicas que están en forma natural en un Hiperparaboloide 5D, dado que son cuatro parámetros involucrados en la definición del Hiperparaboloide 5D, entonces hay cuatro familias de curvas paramétricas que definen la estructura del Hiperparaboloide.

1. Las curvas u_1 – *paramétricas*.

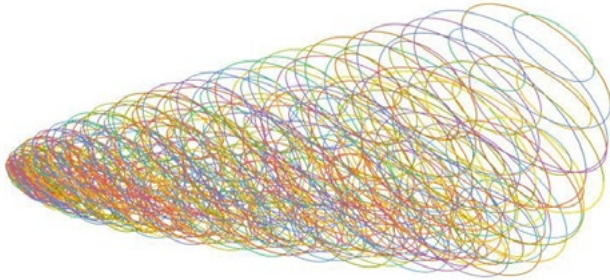
En este caso se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_1 .

```
curvu1 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}], {u2, -Pi/2, Pi/2, Pi/8},
      {u3, 0, 2 Pi, Pi/8}, {u4, 0, 4, 1/4}], 3]];
```

Esta lista es muy extensa, de tal modo que no se presentara, sin embargo, si mostramos el gráfico correspondiente

```
gcurvu1 = ParametricPlot3D[curvu1 // Evaluate, {u1, -Pi/2, Pi/2}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 65. Los paralelos involucrados en un Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Los paralelos en realidad pertenecen a esferas que están radicando en el Hipercilindro 5D

2. Las curvas u_2 – *paramétricas*.

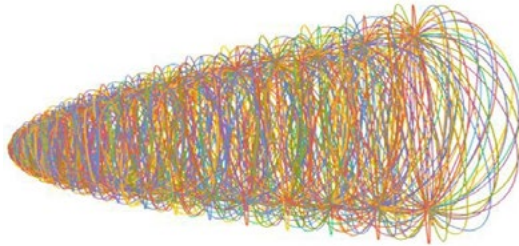
En este caso se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_2 .

```
curvu2 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 6},
      {u3, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 6}, {u4, 0, 4, 1 / 4}], 3]], 3]];
```

No se muestra la lista por lo extensa que es, pero mostramos la gráfica de los objetos geométricos involucrados mediante

```
gcurvu2 = ParametricPlot3D[curvu2 // Evaluate, {u2, -Pi, Pi}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 66. Meridianos en cada Hiperesfera 4D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Podemos hablar de polos sub locales, que están en cada una de las circunferencias observadas.

3. Las curvas u_3 — *paramétricas*.

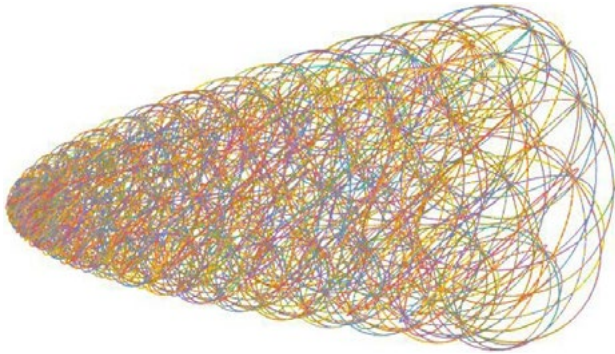
En este caso se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_3 .

```
curvu3 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 6},
      {u2, -Pi, Pi, Pi / 6}, {u4, 0, 4, 1 / 4}]], 3]];
```

Tampoco se muestra la lista, pero si la figura correspondiente a los objetos geométricos involucrados

```
gcurvu3 = ParametricPlot3D[curvu3 // Evaluate, {u3, -Pi / 2, Pi / 2},
  Boxed → False, Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 67. Meridianos es esferas 3D que habitan en un Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

4. Las curvas u_4 – *paramétricas*.

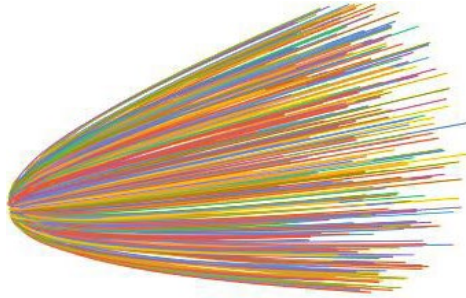
Análogamente se construye una lista dando valores a los parámetros de tal manera que las ecuaciones dependan solamente del parámetro u_4 .

```
curvu4 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}], {u1, 0, 2 Pi, Pi / 6},
      {u2, -Pi, Pi, Pi / 6}, {u3, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 6}]], 3]];
```

No se muestra la lista, pero si la figura correspondiente a los objetos geométricos involucrados

```
gcurvu4 = ParametricPlot3D[curvu4 // Evaluate, {u4, 0, 4}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.000001]]
```

Figura 68. Parábolas en un Paraboloides 4D que habitan en un Hiperparaboloides 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

5. Otras curvas en el Hiperparaboloides 5D

En este caso tomaremos la decisión de que $u_1 = 40t$, $u_2 = t$ los otros dos parámetros tomaran valores específicos, como se muestra en el siguiente código.

```
curvaC1 = HipeParab5D[{40 t, t, u3, u4}]
{-u4 Sin[t] Sin[40 t] Sin[u3],
 u4 Cos[40 t] Sin[t] Sin[u3], -u4 Cos[u3] Sin[t], u4 Cos[t], u4^2}
```

A esta le aplicamos la inmersión.

```
hipeParab5D[{40 t, t, u3, u4}]
```

$$\left\{ \frac{u4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u4 \cos[t]}{\sqrt{3}} + u4 \sin[t] \sin[40t] \sin[u3], \right. \\ \left. -\frac{u4 \cos[t]}{\sqrt{3}} + u4 \cos[40t] \sin[t] \sin[u3], \frac{u4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u4 \cos[t]}{\sqrt{3}} - u4 \cos[u3] \sin[t] \right\}$$

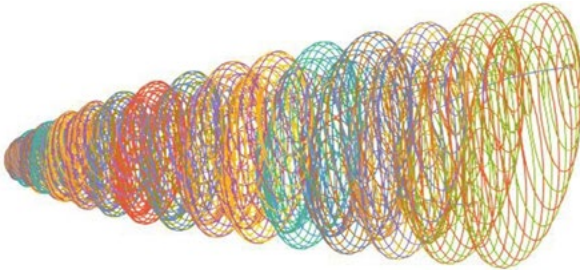
Generamos la lista

```
tC1 =
Union[
Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}], {u3, -Pi/2, Pi/2, Pi/4},
{u4, 0, 4, 1/4}]], 3]] /. {u1 -> 20 t, u2 -> t};
```

Ahora veremos la gráfica mediante

```
gtC1 = ParametricPlot3D[tC1 // Evaluate, {t, 0, Pi}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

Figura 69. Hélices esféricas dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

En este caso tomaremos la decisión de que $u_1 = t$, $u_2 = 40t$, los otros dos parámetros tomaran valores específicos, como se muestra en el siguiente código.

```
CurvaC2 = HipeParab5D[{t, 40 t, u3, u4}]
```

```
{-u4 Sin[t] Sin[40 t] Sin[u3],
  u4 Cos[t] Sin[40 t] Sin[u3], -u4 Cos[u3] Sin[40 t], u4 Cos[40 t], u4^2}
```

Le aplicamos la inmersión

```
hipeParab5D[{t, 40 t, u3, u4}]
```

$$\frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[40t]}{\sqrt{3}} - u_4 \sin[t] \sin[40t] \sin[u_3],$$

$$-\frac{u_4 \cos[40t]}{\sqrt{3}} + u_4 \cos[t] \sin[40t] \sin[u_3], \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[40t]}{\sqrt{3}} - u_4 \cos[u_3] \sin[40t]$$

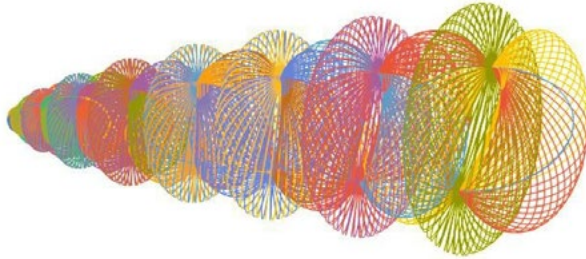
Generamos la lista

```
tc2 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{t, 40 t, u3, u4}], {u3, -Pi/2, Pi/2, Pi/4},
      {u4, 0, 4, 1/2}], 3]], 3]];
```

El gráfico lo obtenemos mediante

```
gtC2 = ParametricPlot3D[tC2 // Evaluate, {t, -Pi / 2, Pi / 2}, Boxed → False,
  Axes → False, PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

Figura 70. Meridianos dentro de esferas 3D que habitan en un Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

```
CurvaC3 = HipeParab5D[{t, t, u3, u4}]
```

Con la inmersión

```
{-u4 Sin[t]^2 Sin[u3], u4 Cos[t] Sin[t] Sin[u3], -u4 Cos[u3] Sin[t], u4 Cos[t], u4^2}
```

```
hipeParab5D[{t, t, u3, u4}]
```

$$\left\{ \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[t]}{\sqrt{3}} + u_4 \sin[t]^2 \sin[u_3], \right. \\ \left. -\frac{u_4 \cos[t]}{\sqrt{3}} + u_4 \cos[t] \sin[t] \sin[u_3], \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[t]}{\sqrt{3}} - u_4 \cos[u_3] \sin[t] \right\}$$

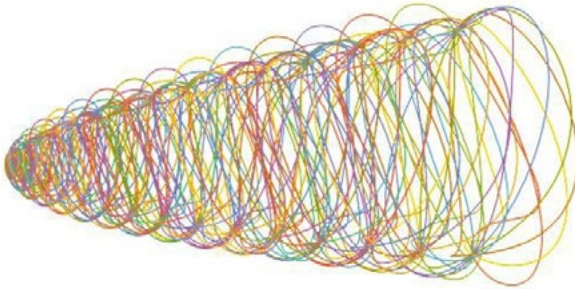
Se genera la lista

```
tc3 =
  Union[
    Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, u4}], {u3, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 8},
      {u4, 0, 4, 1 / 4}]], 3]] /. {u1 → t, u2 → t};
```

Luego lo graficamos

```
gtC3 = ParametricPlot3D[tc3 // Evaluate, {t, -Pi, Pi}, Boxed → False, Axes → False,
  PlotStyle → Thickness[0.0001]]
```

Figura 71. Gráfico de la familia de CurvaC3.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

CurvaC4 = HipeParab5D[{Pi / 3, 4 t, t, Pi / 4}]

$$\left\{ -\frac{1}{8} \sqrt{3} \pi \sin[t] \sin[4t], \frac{1}{8} \pi \sin[t] \sin[4t], -\frac{1}{4} \pi \cos[t] \sin[4t], \frac{1}{4} \pi \cos[4t], \frac{\pi^2}{16} \right\}$$

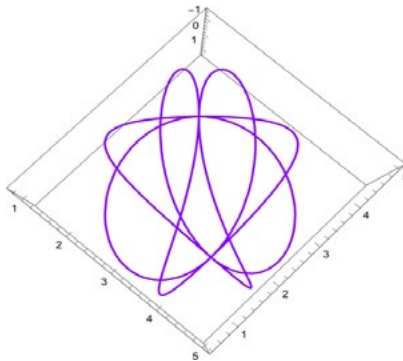
Aplicando la inmersión

hipeParab5D[{Pi / 3, 4 t, t, Pi / 4}]

$$\left\{ \frac{\pi^2}{16 \sqrt{2}} + \frac{\pi \cos[4t]}{4 \sqrt{3}} - \frac{1}{8} \sqrt{3} \pi \sin[t] \sin[4t], \right. \\ \left. -\frac{\pi \cos[4t]}{4 \sqrt{3}} + \frac{1}{8} \pi \sin[t] \sin[4t], \frac{\pi^2}{16 \sqrt{2}} - \frac{\pi \cos[4t]}{4 \sqrt{3}} - \frac{1}{4} \pi \cos[t] \sin[4t] \right\}$$

ParametricPlot3D[hipeParab5D[{2, 4 t, t, 2}], {t, -Pi, Pi}, PlotStyle → Hue[0.75]]

Figura 72. Gráfico de la CurvaC4.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Ahora consideramos $u_2=3t$ y $u_3=5t$, los otros valores son constantes

CurvaC5 = HipeParab5D[{Pi / 3, 3 t, 5 t, Pi / 4}]

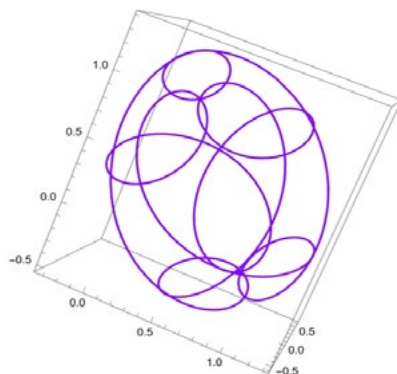
{Cos[t] Sin[2] Sin[4 t], -Cos[2] Cos[t] Sin[4 t], Cos[t] Cos[4 t], Sin[t], 2}

hipeParab5D[{Pi / 3, 3 t, 5 t, Pi / 4}]

$$\left\{ \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} + \frac{\pi \cos[3t]}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\sqrt{3}\pi \sin[3t] \sin[5t], \right. \\ \left. -\frac{\pi \cos[3t]}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\pi \sin[3t] \sin[5t], \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} - \frac{\pi \cos[3t]}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\pi \cos[5t] \sin[3t] \right\}$$

gCurvaC5 = ParametricPlot3D[hipeParab5D[{Pi / 3, 3 t, 5 t, Pi / 4}], {t, -Pi, Pi}, PlotStyle -> Hue[0.75]]

Figura 73. Gráfico de la CurvaC6.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

CurvaC6 = HipeParab5D[{Pi / 3, 4 t, t, Pi / 4}]

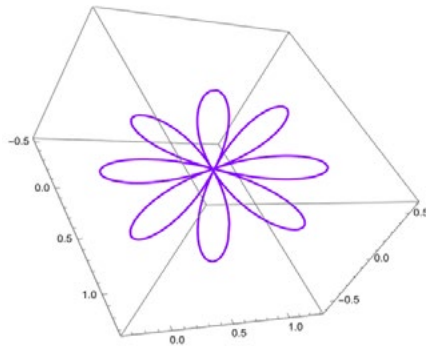
$$\left\{ \frac{1}{8}\sqrt{3}\pi \sin[t] \sin[4t], \frac{1}{8}\pi \sin[t] \sin[4t], -\frac{1}{4}\pi \cos[t] \sin[4t], \frac{1}{4}\pi \cos[4t], \frac{\pi^2}{16} \right\}$$

hipeParab5D[{Pi / 3, 4 t, t, Pi / 4}]

$$\left\{ \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} + \frac{\pi \cos[4t]}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\sqrt{3}\pi \sin[t] \sin[4t], \right. \\ \left. -\frac{\pi \cos[4t]}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\pi \sin[t] \sin[4t], \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} - \frac{\pi \cos[4t]}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\pi \cos[t] \sin[4t] \right\}$$

```
gCurvaC6 = ParametricPlot3D[hipeParab5D[{Pi/3, 4 t, t, Pi/4}], {t, -Pi, Pi},
  PlotStyle -> Hue[0.75]]
```

Figura 74. Gráfico de la CurvaC6.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las Superficies $u_i u_j, i, j=1,2,3,4$ paramétricas en el Hiperparaboloide 5D

En este contexto hay seis familias de superficies las cuales vienen determinadas por el apareamiento de los parámetros involucrados en la definición de la Hiperparaboloide 5D.

$$\{u_1 u_2, u_1 u_3, u_1 u_4, u_2 u_3, u_2 u_4, u_3 u_4\}$$

1. Las superficies $u_1 u_2$ en el Hiperparaboloide 5D.

En este caso se varían los parámetros u_3 y u_4 , de tal manera que las ecuaciones que quedan estén en función de los parámetros u_1 y u_2

```
HipeParab5D[{u1, u2, k1, k2}]
```

$$\left\{ k_2 \sin[k_1] \sin[u_1] \sin[u_2], \right. \\ \left. k_2 \cos[u_1] \sin[k_1] \sin[u_2], -k_2 \cos[k_1] \sin[u_2], k_2 \cos[u_2], k_2^2 \right\}$$

Con la inmersión

hipeParab5D[{u1, u2, k1, k2}]

$$\left\{ \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + k_2 \sin[k_1] \sin[u_1] \sin[u_2], \right. \\ \left. -\frac{k_2 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + k_2 \cos[u_1] \sin[k_1] \sin[u_2], \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} - \frac{k_2 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - k_2 \cos[k_1] \sin[u_2] \right\}$$

Luego generamos la lista

```
sur1 =
  Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, u2, k1, k2}], {k1, -Pi/2, Pi/2, Pi/16},
    {k2, 0, 4, 1/2}]], 3];
```

Ahora la gráfica

```
gsur1 = ParametricPlot3D[sur1 // Evaluate, {u1, -Pi/2, Pi/2}, {u2, -Pi, Pi},
  PlotStyle -> Opacity[0.4], Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 75. Hiperesferas 4D en el Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las hiperesferas se encuentran apiñadas, y la cantidad es infinita.

2. Las superficies $u_1 u_3$ en el Hiperparaboloide 5D.

En este caso se varían los parámetros u_2 y u_4 , de tal manera que las ecuaciones que quedan estén en función de los parámetros u_1 y u_2

HipeParab5D[{u1, k1, u3, k2}]

$$\left\{ -k2 \sin[k1] \sin[u1] \sin[u3], \right. \\ \left. k2 \cos[u1] \sin[k1] \sin[u3], -k2 \cos[u3] \sin[k1], k2 \cos[k1], k2^2 \right\}$$

Con la inmersión

hipeParab5D[{u1, k1, u3, k2}]

$$\left\{ \frac{k2^2}{\sqrt{2}} + \frac{k2 \cos[k1]}{\sqrt{3}} - k2 \sin[k1] \sin[u1] \sin[u3], \right. \\ \left. - \frac{k2 \cos[k1]}{\sqrt{3}} + k2 \cos[u1] \sin[k1] \sin[u3], \frac{k2^2}{\sqrt{2}} - \frac{k2 \cos[k1]}{\sqrt{3}} - k2 \cos[u3] \sin[k1] \right\}$$

Luego generamos la lista

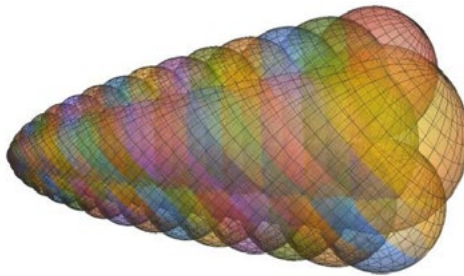
sur2 =

```
Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, k1, u3, k2}], {k1, -Pi, Pi, Pi/4},
{u3, 0, 4, 1/4}], 3];
```

Ahora la gráfica

```
ParametricPlot3D[sur2 // Evaluate, {u1, -Pi/2, Pi/2}, {u3, -Pi/2, Pi/2},
PlotStyle -> Opacity[0.4], Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 76. Esferas en Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las esferas se encuentran apiñadas, y la cantidad es infinita, lógicamente acá se muestran algunas.

3. Las superficies $u_1 u_4$ en el Hiperparaboloides 5D.

En este caso se varían los parámetros u_1 y u_4 , de tal manera que las ecuaciones que quedan estén en función de los parámetros u_2 y u_3

```
HipeParab5D[{u1, k1, k2, u4}]
{-u4 Sin[k1] Sin[k2] Sin[u1],
 u4 Cos[u1] Sin[k1] Sin[k2], -u4 Cos[k2] Sin[k1], u4 Cos[k1], u4^2}
```

Con la inmersión se tiene

```
hipeParab5D[{u1, k1, k2, u4}]
{
  u4^2 + u4 Cos[k1] / Sqrt[3] - u4 Sin[k1] Sin[k2] Sin[u1],
  -u4 Cos[k1] / Sqrt[3] + u4 Cos[u1] Sin[k1] Sin[k2],
  u4^2 / 2 - u4 Cos[k1] / Sqrt[3] - u4 Cos[k2] Sin[k1]
}
```

Luego generamos la lista

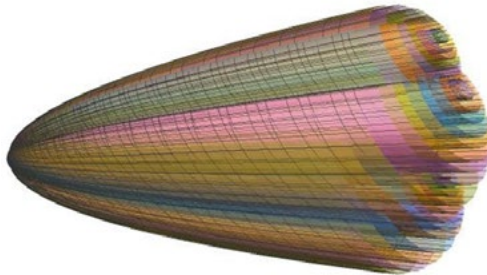
```
sur3 =
Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{u1, k1, k2, u4}], {k1, -Pi, Pi, Pi/4},
 {k2, 0, 4, 1/4}]], 3];
```

Ahora la grafica

```
gsur3 = ParametricPlot3D[sur3 // Evaluate, {u1, -Pi/2, Pi/2}, {u4, 0, 4},
 PlotStyle -> Opacity[0.4], Axes -> False, Boxed -> False]
```

A continuación, la figura con el software

Figura 77. Paraboloides 3D en el Hiperparaboloides 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Los paraboloides están apiñados, y la cantidad es infinita, lógicamente acá se muestran algunos.

4. Las superficies $u_2 u_3$ en el Hiperparaboloide 5D.

En este caso la familia está determinada por

HipeParab5D[{**k1**, **u2**, **u3**, **k2**}]

$$\left\{ -k2 \sin[k1] \sin[u2] \sin[u3], \right. \\ \left. k2 \cos[k1] \sin[u2] \sin[u3], -k2 \cos[u3] \sin[u2], k2 \cos[u2], k2^2 \right\}$$

Con la inmersión

hipeParab5D[{**k1**, **u2**, **u3**, **k2**}]

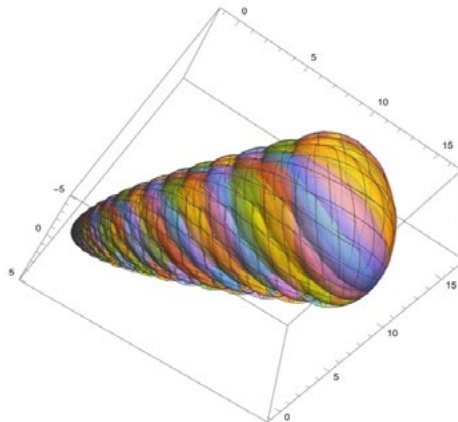
$$\left\{ \frac{k2^2}{\sqrt{2}} + \frac{k2 \cos[u2]}{\sqrt{3}} - k2 \sin[k1] \sin[u2] \sin[u3], \right. \\ \left. -\frac{k2 \cos[u2]}{\sqrt{3}} + k2 \cos[k1] \sin[u2] \sin[u3], \frac{k2^2}{\sqrt{2}} - \frac{k2 \cos[u2]}{\sqrt{3}} - k2 \cos[u3] \sin[u2] \right\}$$

sur4 =

```
Partition[Flatten[Table[hipeCili5D[{k1, u2, u3, k2}, 1], {k1, -Pi, Pi, Pi/4},
{k2, 0, 2, 1/4}], 3];
```

Lo graficamos

Figura 78. Esferas3D en Hiperesferas 4D en Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

5. Las superficies $u_2 u_4$ en el Hipercilindro 5D.

En este caso la familia está determinada por

HipeParab5D[{**k1**, **u2**, **k2**, **u4**}]

$$\{-u4 \sin[k1] \sin[k2] \sin[u2], \\ u4 \cos[k1] \sin[k2] \sin[u2], -u4 \cos[k2] \sin[u2], u4 \cos[u2], u4^2\}$$

Con la inmersión

HipeParab5D[{**k1**, **u2**, **k2**, **u4**}]

$$\left\{ \frac{u4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u4 \cos[u2]}{\sqrt{3}} - u4 \sin[k1] \sin[k2] \sin[u2], \right. \\ \left. - \frac{u4 \cos[u2]}{\sqrt{3}} + u4 \cos[k1] \sin[k2] \sin[u2], \frac{u4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u4 \cos[u2]}{\sqrt{3}} - u4 \cos[k2] \sin[u2] \right\}$$

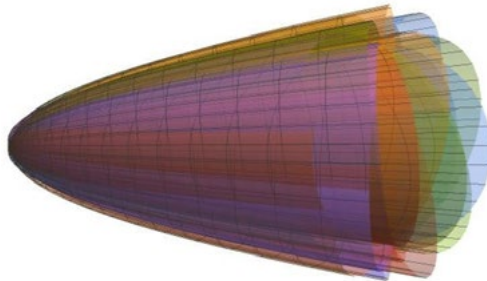
Ahora generamos la siguiente familia de superficies

```
sur5 =
  Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{k1, u2, k2, u4}], {k1, -Pi/2, Pi/2, Pi/4},
    {k2, 0, 2 Pi, Pi/4}]], 3];
```

Enseguida se obtiene la grafica

```
ParametricPlot3D[sur5 // Evaluate, {u2, 0, Pi}, {u4, 0, 4}, PlotStyle -> Opacity[0.4],
  Axes -> False, Boxed -> False]
```

Figura 79. Familia de paraboloides $u_2 u_4$ en el Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

6. Las superficies $u_3 u_4$ en el Hiperparaboloide 5D.

La familia de estas superficies viene dada por

HipeParab5D[{**k1**, **k2**, **u3**, **u4**}]

$$\{-u_4 \sin[k_1] \sin[k_2] \sin[u_3], \\ u_4 \cos[k_1] \sin[k_2] \sin[u_3], -u_4 \cos[u_3] \sin[k_2], u_4 \cos[k_2], u_4^2\}$$

Con la inmersión

hipeParab5D[{k1, k2, u3, u4}]

$$\left\{ \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[k_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \sin[k_1] \sin[k_2] \sin[u_3], \right. \\ \left. - \frac{u_4 \cos[k_2]}{\sqrt{3}} + u_4 \cos[k_1] \sin[k_2] \sin[u_3], \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[k_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \cos[u_3] \sin[k_2] \right\}$$

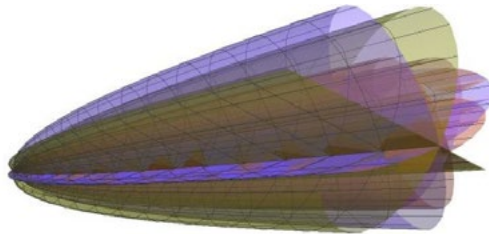
Generamos la familia de estas superficies

```
sur6 =
  Partition[Flatten[Table[hipeParab5D[{k1, k2, u3, u4}], {k1, -Pi/2, Pi/2, Pi/4},
    {k2, -Pi/2, Pi/2, Pi/4}], 3];
```

Luego la graficamos

```
gsur6 = ParametricPlot3D[sur6 // Evaluate, {u3, -Pi/2, Pi/2}, {u4, 0, 4},
  PlotStyle -> Opacity[0.4], Axes -> False, Boxed -> False, PlotRange -> All]
```

Figura 80. Familia de cilindros $u_3 u_4$ en el Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Las Hipersuperficies $4D \ u_i u_j u_k, i, j, k=1,2,3,4$ en el Hipercilindro 5D

Esta hipersuperficies dependen de tres parámetros, según esto tenemos tres familias de hipersuperficies 4D dentro del Hi-

perparaboloide 5D. Las cuales dependen de los siguientes parámetros

$$\{u_1 u_2 u_3, u_1 u_2 u_4, u_2 u_3 u_4\}.$$

Ahora comenzamos con las primeras

1. Las hipersuperficies $u_1 u_2 u_3$ en el Hipercilindro 5D.

La familia de Hipersuperficies 4D viene dada por la siguiente ecuación

HipeParab5D[{u1, u2, u3, k}]

$$\left\{ -k \sin[u1] \sin[u2] \sin[u3], \right. \\ \left. k \cos[u1] \sin[u2] \sin[u3], -k \cos[u3] \sin[u2], k \cos[u2], k^2 \right\}$$

Con la inmersión

hipeParab5D[{u1, u2, u3, k}]

$$\left\{ \frac{k^2}{\sqrt{2}} + \frac{k \cos[u2]}{\sqrt{3}} - k \sin[u1] \sin[u2] \sin[u3], \right. \\ \left. - \frac{k \cos[u2]}{\sqrt{3}} + k \cos[u1] \sin[u2] \sin[u3], \frac{k^2}{\sqrt{2}} - \frac{k \cos[u2]}{\sqrt{3}} - k \cos[u3] \sin[u2] \right\}$$

Generamos la siguiente lista

hipePsur1 = Table[hipeParab5D[{u1, u2, u3, k}], {k, 0, 4, 1/4}];

De esa lista escogemos la que está ubicada en la décima posición.

hipePsur1[[10]]

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{81}{16\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\sqrt{3}\cos[u_2] - \frac{9}{4}\sin[u_1]\sin[u_2]\sin[u_3], \\ &-\frac{3}{4}\sqrt{3}\cos[u_2] + \frac{9}{4}\cos[u_1]\sin[u_2]\sin[u_3], \\ &\frac{81}{16\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\sqrt{3}\cos[u_2] - \frac{9}{4}\cos[u_3]\sin[u_2] \end{aligned} \right\}$$

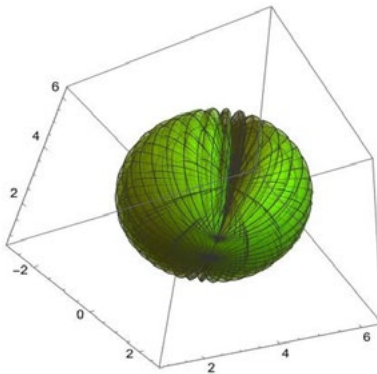
Luego generamos la siguiente familia de superficies

```
thipePsur110 = Table[hipePsur1[[10]], {u1, -Pi/2, Pi/2, Pi/16}];
```

Luego la graficamos

```
gthipePsur110 = ParametricPlot3D[thipePsur110, {u2, -Pi/2, Pi/2},  
  {u3, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Hue[0.25], Opacity[0.4]}]
```

Figura 81. Una Hiperesfera 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

A continuación, escogemos la que está ubicada en la décima

$$\text{sexta} \left\{ \begin{aligned} &\frac{225}{16\sqrt{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{3}\cos[u_2] - \frac{15}{4}\sin[u_1]\sin[u_2]\sin[u_3], \\ &-\frac{5}{4}\sqrt{3}\cos[u_2] + \frac{15}{4}\cos[u_1]\sin[u_2]\sin[u_3], \\ &\frac{225}{16\sqrt{2}} - \frac{5}{4}\sqrt{3}\cos[u_2] - \frac{15}{4}\cos[u_3]\sin[u_2] \end{aligned} \right\}$$

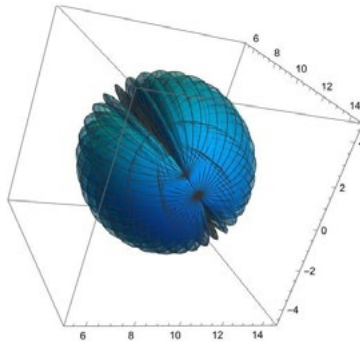
Luego generamos la siguiente familia de superficies

```
thipePsur116 = Table[hipePsur1[[16]], {u1, -Pi / 2, Pi / 2, Pi / 16}];
```

Luego la graficamos

```
gthipePsur116 = ParametricPlot3D[thipePsur116, {u2, -Pi, Pi},  
  {u3, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Hue[0.55], Opacity[0.4]}]
```

Figura 82. Otra Hiperesfera 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D.

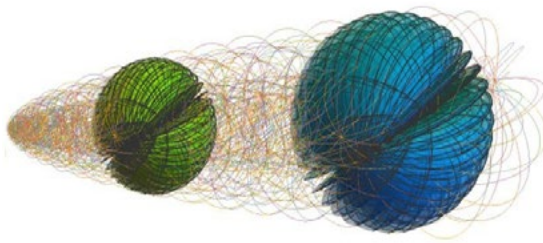


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

A continuación, mostramos las Hiperesfera dentro de Hiper-cilindro 5D

```
Show[gcurvu3, gthipePsur110, gthipePsur116, PlotRange -> All]
```

Figura 83. Las dos Hiperesferas 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

2. Las hipersuperficies $u_1 u_2 u_4$ en el Hiperparaboloide 5D.

En este caso las hipersuperficies están determinadas por la siguiente ecuación.

$$\text{HipeParab5D}[\{u_1, u_2, k, u_4\}]$$

$$\{-u_4 \sin[k] \sin[u_1] \sin[u_2],$$

$$u_4 \cos[u_1] \sin[k] \sin[u_2], -u_4 \cos[k] \sin[u_2], u_4 \cos[u_2], u_4^2\}$$

Mediante la inmersión

$$\text{hipeParab5D}[\{u_1, u_2, k, u_4\}]$$

$$\left\{ \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \sin[k] \sin[u_1] \sin[u_2], \right.$$

$$\left. - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + u_4 \cos[u_1] \sin[k] \sin[u_2], \right.$$

$$\left. \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \cos[k] \sin[u_2] \right\}$$

Generamos la siguiente lista

$$\text{hipePsur2} = \text{Table}[\text{hipeParab5D}[\{u_1, u_2, k, u_4\}], \{k, 0, 2 \text{ Pi}, \text{ Pi} / 4\}];$$

Ahora como estas ecuaciones dependen de tres parámetros, vamos a escoger la cuarta

$$\text{hipePsur2}[[4]]$$

$$\left\{ \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - \frac{u_4 \sin[u_1] \sin[u_2]}{\sqrt{2}}, \right.$$

$$\left. - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + \frac{u_4 \cos[u_1] \sin[u_2]}{\sqrt{2}}, \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + \frac{u_4 \sin[u_2]}{\sqrt{2}} \right\}$$

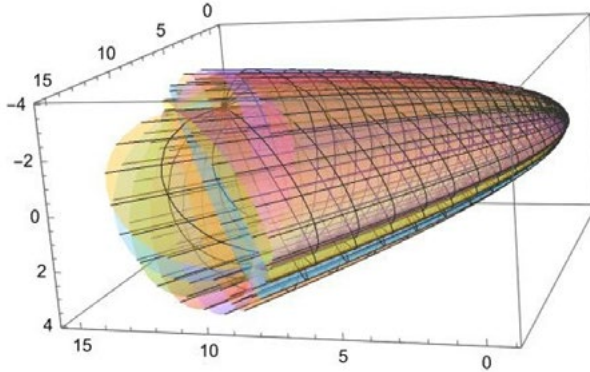
Con esta ecuación generamos la siguiente familia

$$\text{thipePsur24} = \text{Table}[\text{hipePsur2}[[4]], \{u_1, -\text{Pi} / 2, \text{ Pi} / 2, \text{ Pi} / 8\}];$$

Luego lo graficamos

```
gthipePsur24 = ParametricPlot3D[thipePsur24, {u2, -Pi, Pi},
  {u4, 0, 4}, PlotStyle -> {Hue[0.55], Opacity[0.4]}, PlotRange -> All]
```

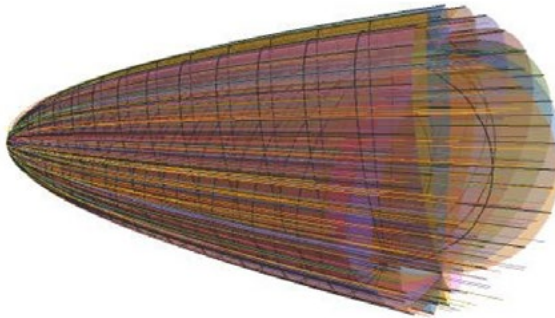
Figura 84. Un Hiperparaboloide 4D que está dentro del Hipercilindro 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Luego la mostramos junto a gcurvu3

Figura 85. El Hiperparaboloide 4D junto con gcurvu4 en el Hiperparaboloide 5D.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

3. Las hipersuperficies $u_2 u_3 u_4$ en el Hiper Cilindro 5D.

La ecuación que determinas estas hipersuperficies son

HipeParab5D[{**k**, **u2**, **u3**, **u4**}]

$$\{-u_4 \sin[k] \sin[u_2] \sin[u_3], \\ u_4 \cos[k] \sin[u_2] \sin[u_3], -u_4 \cos[u_3] \sin[u_2], u_4 \cos[u_2], u_4^2\}$$

Aplicando la inmersión

hipeParab5D[{**k**, **u2**, **u3**, **u4**}]

$$\left\{ \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \sin[k] \sin[u_2] \sin[u_3], \right. \\ \left. - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + u_4 \cos[k] \sin[u_2] \sin[u_3], \right. \\ \left. \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \cos[u_3] \sin[u_2] \right\}$$

Generamos la siguiente lista

hipesur3 = **Table**[**hipeParab5D**[{**k**, **u2**, **u3**, **u4**}], {**k**, -Pi/2, Pi/2, Pi/8}];

Ahora como estas ecuaciones dependen de tres parámetros, vamos a escoger la quinta

$$\left\{ \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} + \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}}, - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} + u_4 \sin[u_2] \sin[u_3], \right. \\ \left. \frac{u_4^2}{\sqrt{2}} - \frac{u_4 \cos[u_2]}{\sqrt{3}} - u_4 \cos[u_3] \sin[u_2] \right\}$$

hipesur3[[5]]

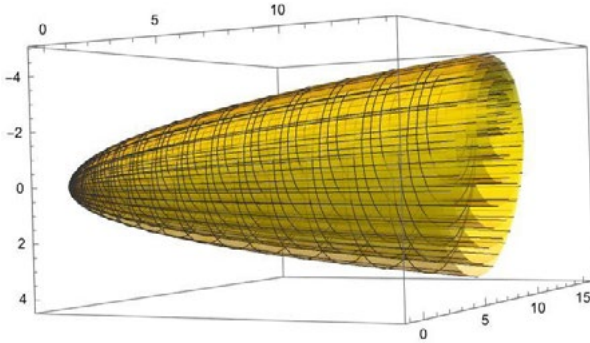
Luego generamos la siguiente familia

thipesur35 = **Table**[**hipesur3**[[5]], {**u2**, -Pi/2, Pi/2, Pi/16}];

Luego lo graficamos

```
gthipesur35 = ParametricPlot3D[thipesur35, {u3, 0, 2 Pi}, {u4, 0, 4},  
PlotStyle → {Hue[0.55], Opacity[0.4]}]
```

Figura 86. Un Hiperparaboloide 4D que está dentro del Hiperparaboloide 5D.

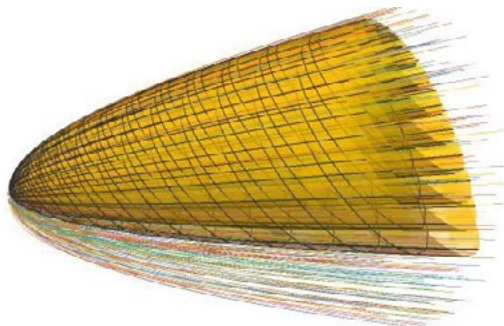


Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

Además, lo mostramos dentro del Hiperparaboloide 5D

```
Show[gcurvu4, gthipesur35]
```

Figura 87. Un Hiperparaboloide 4D que está dentro del gcurvu4.



Nota: Jiménez Vilcherrez (2024).

05 Capítulo

*Reflexiones finales sobre la visualización
de hipersuperficies en espacios de alta
dimensión*

El recorrido realizado a lo largo de esta investigación ha permitido avanzar significativamente en la comprensión y representación de objetos geométricos inmersos en espacios de dimensionalidad superior, particularmente en la cuarta y quinta dimensiones. Uno de los logros más relevantes ha sido la construcción de nuevas inmersiones que posibilitan la visualización gráfica de hipersuperficies en estos espacios, superando las limitaciones de los modelos previos y ofreciendo representaciones más claras y detalladas de estructuras que, por su naturaleza abstracta, resultan inaccesibles a la percepción sensorial directa. Estas inmersiones, basadas en proyecciones lineales cuidadosamente diseñadas, permiten trasladar la información geométrica contenida en espacios de alta dimensión al espacio tridimensional, facilitando así su observación y análisis mediante herramientas computacionales estándar. La mejora introducida respecto a modelos anteriores, como el utilizado por Escobar (2023), radica en una optimización de los vectores directores que reduce las distorsiones visuales y permite una apreciación más fiel de las propiedades estructurales de los objetos estudiados, lo que constituye un avance significativo en el campo de la visualización geométrica computacional.

En el ámbito de los objetos tetradimensionales, se logró caracterizar exhaustivamente las curvas paramétricas que definen el esqueleto del hipercilindro y el hiperparaboloide en 4D, identificando las familias de curvas u_1 , u_2 y u_3 que constituyen los elementos estructurales fundamentales de estas hipersuperficies. Esta caracterización, que incluye el estudio de las propiedades de planaridad de las curvas y la identificación de sus puntos singulares, proporciona una descripción completa de la geometría de estos objetos desde una perspectiva unidimensional, complementando el análisis algebraico con una interpretación geomé-

trica que facilita la comprensión de su estructura. Asimismo, se generaron superficies básicas intrínsecas a los hipercilindros e hiperparaboloides en 4D, que corresponden a las proyecciones bidimensionales obtenidas al fijar ciertos parámetros y variar otros dos, lo que permite visualizar la estructura del objeto desde una perspectiva bidimensional y comprender cómo las diferentes familias de superficies se articulan para formar el objeto completo.

La extensión del estudio a la quinta dimensión ha representado un desafío adicional que ha sido superado mediante la generalización de las técnicas desarrolladas para el caso tetradimensional. En el proceso de estudiar el hipercilindro y el hiperparaboloide en 5D, se identificaron y graficaron las curvas paramétricas que describen la estructura esquelética de estas hipersuperficies, revelando patrones de simetría y organización que son análogos a los observados en dimensiones inferiores pero con una complejidad añadida que refleja el incremento en el número de grados de libertad. Estas curvas, que se obtienen al fijar tres de los cuatro parámetros y variar el restante, constituyen las líneas coordenadas del objeto y proporcionan una ventana a su estructura interna, permitiendo identificar las diferentes familias de curvas que lo componen y comprender cómo se relacionan entre sí para formar el objeto global. Además, se generaron las curvas y superficies intrínsecas a los hipercilindros e hiperparaboloides en 5D, completando así la caracterización geométrica de estos objetos y proporcionando un conjunto de visualizaciones que permiten apreciar su complejidad y belleza.

Un resultado particularmente relevante ha sido la caracterización de las hipersuperficies de 4D involucradas en los hipercilindros e hiperparaboloides en 5D, lo que ha permitido comprender cómo los objetos tetradimensionales se organizan y se relacionan

dentro de estructuras pentadimensionales más amplias. Esta caracterización revela que los hipercilindros e hiperparaboloides en 5D pueden ser vistos como familias de hipersuperficies tetradimensionales apiladas a lo largo de la quinta dimensión, cada una de las cuales conserva las propiedades geométricas de los objetos en 4D pero está desplazada o transformada de acuerdo con la estructura global del objeto pentadimensional. Este descubrimiento tiene implicaciones importantes para la comprensión de la geometría de altas dimensiones, ya que sugiere que muchos objetos en dimensiones superiores pueden ser entendidos como extensiones naturales de objetos en dimensiones inferiores, organizados de manera sistemática a lo largo de las dimensiones adicionales. El uso del software Mathematica fue de importancia fundamental para poder observar y describir los objetos geométricos vinculados dentro de cada hipersuperficie hipercilíndrica e hiperparabólica en 5D, ya que proporcionó las capacidades de cálculo simbólico, manipulación numérica y visualización gráfica que fueron necesarias para llevar a cabo esta investigación, permitiendo generar representaciones de alta resolución y explorar interactivamente las propiedades de los objetos estudiados.

Orientaciones para futuras exploraciones en visualización multidimensional

A la luz de los resultados obtenidos y las lecciones aprendidas durante el desarrollo de esta investigación, se ofrecen algunas orientaciones para aquellos investigadores y estudiantes que deseen continuar explorando el fascinante campo de la visualización geométrica en espacios de alta dimensión. En primer lugar, se recomienda familiarizarse con las técnicas de inmersión

y proyección, con la finalidad de mejorar la presentación de gráficos para más dimensiones, ya que el dominio de estas técnicas es fundamental para poder representar adecuadamente objetos en espacios de dimensionalidad superior y para interpretar correctamente las visualizaciones resultantes. La comprensión de los fundamentos matemáticos de las inmersiones, incluyendo la elección de vectores directores y la optimización de las proyecciones, permitirá a los investigadores desarrollar sus propios modelos adaptados a las características específicas de los objetos que deseen estudiar, superando las limitaciones de los modelos genéricos y obteniendo visualizaciones más informativas y precisas.

Asimismo, se sugiere aplicar la estrategia desarrollada en esta investigación para hacer el estudio de los hiperelipsoides, hiperboloides y otras familias de hipersuperficies en la cuarta y quinta dimensión, extendiendo así el alcance de las técnicas de visualización a una gama más amplia de objetos geométricos. La metodología empleada, que combina la definición paramétrica de los objetos, la aplicación de inmersiones lineales y la generación de curvas y superficies básicas, es suficientemente general como para ser aplicada a cualquier objeto definido por ecuaciones paramétricas en espacios de alta dimensión, siempre que se cuente con las herramientas computacionales adecuadas para llevar a cabo los cálculos y las visualizaciones correspondientes. Se recomienda también desarrollar otros tipos de hipersuperficies tanto en la cuarta como la quinta dimensión que no sean provenientes de ecuaciones cuadráticas, explorando así la riqueza de la geometría de altas dimensiones más allá de los objetos tradicionalmente estudiados, lo que podría conducir al descubrimiento de nuevas propiedades y relaciones que amplíen nuestro conocimiento de estos espacios abstractos.

Desde una perspectiva práctica, se aconseja a los interesados en esta línea de investigación usar softwares libres como MAXIMA y OCTAVE para hacer las simulaciones y no incurrir en faltas graves por uso de software sin licencias, aprovechando las ventajas que ofrecen estas herramientas de código abierto en términos de accesibilidad, transparencia y comunidad de usuarios. El uso de software libre no solo garantiza el cumplimiento de las normativas legales y éticas, sino que también facilita la reproducibilidad de los resultados y la colaboración entre investigadores de diferentes instituciones, ya que el código fuente está disponible para su revisión y modificación por parte de la comunidad científica. Finalmente, se recomienda usar una computadora con altas prestaciones en memoria RAM y tarjeta gráfica, de tal modo que no colapsen en el procesamiento y no se generen frustraciones innecesarias, ya que la visualización de objetos en espacios de alta dimensión puede requerir recursos computacionales significativos, especialmente cuando se generan gráficos de alta resolución o se realizan animaciones que requieren el procesamiento de grandes cantidades de datos. La inversión en equipamiento adecuado es fundamental para poder llevar a cabo este tipo de investigaciones con eficiencia y calidad, permitiendo a los investigadores centrarse en los aspectos conceptuales y geométricos en lugar de verse limitados por restricciones técnicas.

REFERENCIAS

- Aguilar, M. B. (2022). *Geometría analítica*. Pearson educación.
- Anto, L. A., Fiestas, A. M., Ojeda, E. J., Velezmoro, R., & Ipanaqué, R. (2020). A Mathematica package for plotting implicitly defined hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2020*, 12250, 117-129. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58802-1_9
- Barret, O. (1972). *Elementos de geometría diferencial*. Limusa-Wiley, S. A.
- Escobar, E. (2023). *Comportamientos cualitativos de un sistema lineal de Lorenz en $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$ apoyados gráficamente con el software Octave* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Piura].
- Facundo, S. O. (2023). *Rectas y cónicas en espacios euclidianos de dimensión mayor que dos, con asistencia del software Mathematica* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Piura].
- Fuller, G. T. (1999). *Geometría analítica*. Addison Wesley Iberoamericana.
- Jiménez Vilcherrez, J. K. (2024). *Modelo geométrico 5D para el estudio de las hipersuperficies cilíndricas y paraboidales con Mathematica* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Piura]
- Kindle, J. (s.f.). *Geometría analítica*. McGraw-Hill.
- Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica*. Limusa.
- Lone, M. S., Aleessio, O., Jamali, M., & Shahid, M. H. (2016). Transversal intersection of hypersurfaces in $\mathbb{R}^5$. *Differential Geometry*, 15(2), 147-162.

- Velezmoro, R. I. (2019). A Mathematica package for visualizing objects immersed in R4. En *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2019 – 19th International Conference, Proceedings* (pp. 479-493). Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58802-1_9
- Velezmoro, R., & Ipanaqué, R. (2015). Un modelo para visualizar objetos en 4D con el Mathematica. *ECIPerú*, 12(2), 12-18. <https://doi.org/10.33017/RevECIPeru2014.0008>

Atik Editorial



ISBN: 978-9907-820-14-0

